به نام خدای مهربان

مجموعه کتاب های

بیست‌پک

پرسؤال

ریاضی ۳

رشتهٔ تجربی

دوازدهم

دکتر محمودرضا داورزنی، سید امیرسعید حسینی، محمدرضا ابراهیمی

مطابق با جدیدترین رویکرد امتحانات نهایی

مهروماه

مقدمه

هدف کتاب

امتحان نهایی تأثیر به‌سزایی در قبول‌شدن شما در رشته و دانشگاه مورد علاقه‌تون و نتیجتاً در آیندهٔ شغلی و جایگاهتون در جامعه داره.

در درس‌هایی مثل ریاضی، شما در کنکور فقط باید به جواب آخر برسید و راه‌حلتون اهمیتی نداره؛ اما در امتحان نهایی، مرحله‌به‌مرحلهٔ پاسختون نمره داره و جواب آخرتون فقط بخش کوچیکی از نمره هست؛ پس باید خیلی‌خیلی بیشتر از گذشته برای امتحان نهایی وقت بگذارید.

ساختار بیست‌پک

مجموعهٔ بیست‌پک شامل: ۱ کتاب پرسؤال ۲ کاربرگ امتحانی ۳ خلاصه‌کپسولی

۱ کتاب پرسؤال:

در درسنامه، فصل را مطابق کتاب درسی تقسیم‌بندی کردیم و یک درسنامهٔ کامل برای شما نوشته‌ایم که با حل تمرین‌های کتاب درسی غنی شده و با خواندن آن می‌توانید به همهٔ سؤالات امتحان نهایی پاسخ دهید. ما مرحله‌به‌مرحله پاسخ مثال‌ها را توضیح دادیم و شما هم باید تمامی این مراحل را به‌خوبی یاد بگیرید؛ چون اگر کامل ننویسید، مُصَحِح‌های امتحان نهایی به شما نمرهٔ کامل را نخواهند داد!

در این کتاب، تمام مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی، سؤالات امتحان‌های نهایی داخل و خارج از کشور و سؤالاتی از کنکور را که ممکن است در امتحان نهایی هم با آن روبه‌رو شوید، جمع‌آوری کرده‌ایم و به‌صورت کاملاً تشریحی به آن‌ها پاسخ داده‌ایم. برخی از سؤالات را که با آیکون +۲۰ مشخص کرده‌ایم، کمی چالشی‌تر هستند و ویژهٔ کسانی است که می‌خواهند در امتحان نهایی نمرهٔ بیست بگیرند.

بچه‌های عزیز باز هم تأکید می‌کنم که به شیوهٔ نوشتن پاسخ تشریحی خیلی توجه کنید؛ هر قسمت از این پاسخ‌ها در امتحان نهایی دارای بارم است.

۲ کاربرگ امتحانی:

کاربرگ امتحانی شامل امتحان‌های فصل‌به‌فصل، دو امتحان تألیفی نوبت اول، دو امتحان شبیه‌سازی‌شدهٔ نهایی و دو امتحان برگزارشدهٔ اخیر به همراه پاسخ تشریحی و بارم‌بندی ریز هر سؤال است.

پیشنهاد می‌کنیم بعد از حل تمامی سؤالات هر فصل در کتاب پرسؤال، امتحان آن فصل را در کاربرگ حل کنید، همچنین حل امتحان‌های نوبت اول و دوم می‌تواند کمک بسیار زیادی به موفقیت شما در جلسهٔ امتحان بکند.

۳ خلاصه‌کپسولی:

سی تیپ بسیار پرتکرار امتحان‌های نهایی گذشته را با توضیح برایتان گردآوری کرده‌ایم. به احتمال بسیار زیاد، امتحان نهایی شما هم شباهت‌های فراوانی به امتحان نهایی‌های گذشته خواهد داشت. از مرور این گنج ارزشمند در شب امتحان غافل نشوید.

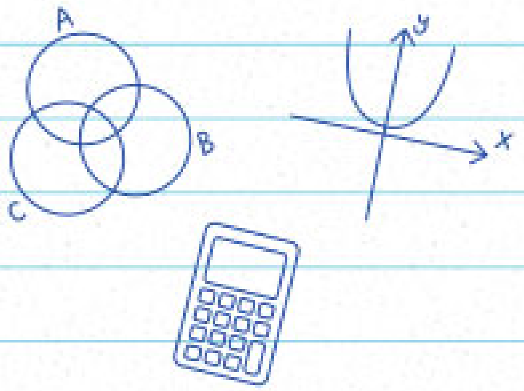
امید است که با مطالعهٔ مجموعهٔ بیست‌پک و حل سؤالات آن، نمرهٔ کامل این درس را در امتحان نهایی کسب کنید.

با سپاس فراوان از تمام دوستانی که در تألیف این کتاب همراهمان بودند.

دوستدار شما

مؤلفین بیست‌پک

فهرست



فصل اول
تابع

مشاوره: به فصل اول کتاب ریاضی دوازدهم خوش اومدین. این فصل جزء فصل‌های مهم و پایه‌ای کتاب ریاضی دوازدهمه و ادامهٔ مبحث تابع سال دهم و یازدهمه.
۳ تا درس توی فصل اول اومده که هرکدومشون چند تا مبحث رو شامل می‌شن. توی اولین درس این فصل، تابع چندجمله‌ای و به‌طور خاص تابع درجه ۳ معرفی می‌شه و بعدش می‌ریم سراغ صعودی یا نزولی‌بودن یک تابع. درکل درس اول خوراک سؤالای درست و نادرست و جای خالیه و همیشه از این درس توی امتحان نهایی سؤالای درست و نادرست و جای خالی داشتیم. درس دوم هم خودش دو قسمت می‌شه، ترکیب توابع و رسم به کمک تبدیل‌ها و انتقال. نقطه‌ضعف بچه‌ها توی این درس، پیدا کردن دامنهٔ تابع مرکبه! که پیشنهاد می‌کنم حتماً روی این قسمت مسلط بشین! درس سوم هم راجع به یک‌به‌یک کردن توابع با محدودسازی دامنهٔ اوناست و درآخر راجع به تابع وارون بحث شده که ادامهٔ درس تابع سال یازدهمه....
بارم‌بندی این فصل توی امتحان نهایی دو سال اخیر به‌صورت زیر هست:

مباحثی که می‌خوانید		بارم‌بندی در خرداد ۱۴۰۲	بارم‌بندی در خرداد ۱۴۰۳
درس ۱	توابع چندجمله‌ای / توابع صعودی و نزولی	۰/۵	۱
درس ۲	ترکیب توابع	۱/۵	۰/۷۵
درس ۳	تابع وارون	۰/۷۵	۱/۵
مجموع		۲/۷۵	۳/۲۵

درس ۱ توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

توابع چندجمله‌ای

تعریف: هر تابع به‌صورت $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ را که در آن $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی باشد و $a_n \neq 0$، یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n می‌نامیم.

مشاوره نهایی: توی چند سال اخیر، از این قسمت، سؤالای جای خالی و درست و نادرست زیادی درامتحان نهایی طرح شده؛ برای همین به نکات مهم زیر، توجه ویژه‌ای داشته باشید.

● **نکات توابع چندجمله‌ای**

۱ بیشترین توانِ x، یعنی n، درجهٔ آن چندجمله‌ای است؛ برای نمونه $y=x^4-3x^3+1$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۴ است.

۲ n عدد صحیحِ نامنفی است؛ پس اگر در عبارتی، توانِ x عددی منفی یا غیرصحیح بود، آن عبارت چندجمله‌ای نیست؛ برای نمونه $y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ یا $y=x^{-1}=\frac{1}{x}$ چندجمله‌ای نیستند.

۳ دامنهٔ همهٔ توابع چندجمله‌ای $\mathbb{R}$ است. (بعداً یه نگاهی به نمودارهاشون بندازید.)

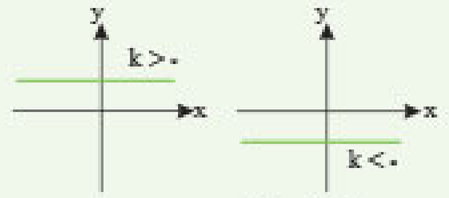
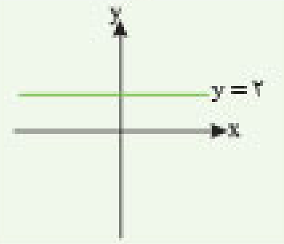
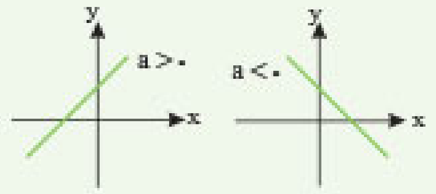
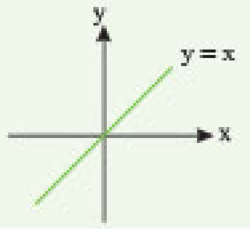
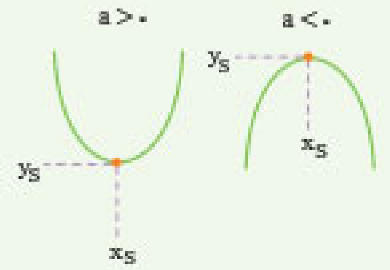
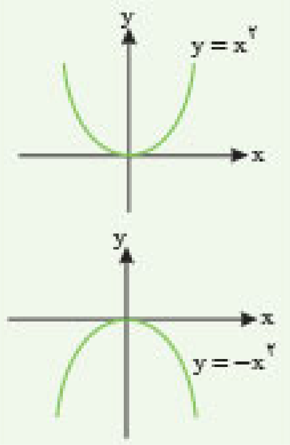
۴ برد توابع چندجمله‌ای با درجهٔ فرد $\mathbb{R}$ است. (مهم‌ترین تابع چندجمله‌ای با درجهٔ زوج، تابع درجهٔ دومه که برد اون در ادامه بررسی می‌شه.)

سؤال کدام‌یک از توابع زیر، چندجمله‌ای است؟ (مشابه مثال کتاب درسی)

الف) $y=\sqrt[3]{x}+1$ ب) $y=3x^2+\sin x$ پ) $y=\sqrt{2}x+\frac{1}{3}$

جواب الف) با توجه به این‌که توانِ x در $\sqrt[3]{x}$، برابر $\frac{1}{3}$ است و طبق تعریف توابعِ چندجمله‌ای، عدد $\frac{1}{3}$ عدد صحیحِ نامنفی نیست؛ بنابراین $y=\sqrt[3]{x}+1$ چندجمله‌ای نیست.
ب) عبارات شامل نسبت‌های مثلثاتی، چندجمله‌ای نیستند!
پ) این عبارت چندجمله‌ای است؛ زیرا ضریبِ x، زیر رادیکال قرار دارد نه خود x!

در جدول زیر، توابع چندجمله‌ای مهم که در سال‌های قبل با آن‌ها آشنا شده‌اید، آورده شده است:

نام	مشهور به	ضابطه	نمودارها	دامنه	برد	نمونه
چندجمله‌ای درجه صفر	تابع ثابت	$y=k$	 نمودار آن موازی محور x هاست	$\mathbb{R}$	$\{k\}$	
چندجمله‌ای درجه ۱	تابع خطی	$y=ax+b\ (a\neq 0)$		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
چندجمله‌ای درجه ۲	تابع سهمی	$y=ax^2+bx+c$ (فرم ۱) $y=a(x-x_S)^2+y_S$ $(a\neq 0)$ (فرم ۲)	 رأس سهمی $S(x_S,y_S)=(-\frac{b}{2a},\frac{-\Delta}{4a})$	$\mathbb{R}$	$a>0$ $[-\frac{\Delta}{4a},+\infty)$ $a<0$ $(-\infty,\frac{-\Delta}{4a}]$	

توجه: تابع چندجمله‌ای درجه ۳ را مفصل‌تر در ادامه بررسی خواهیم کرد.

یادآوری: در سال‌های گذشته با رسم نمودار توابع چندجمله‌ای درجه ۱ (خطی) و درجه ۲ (سهمی) آشنا شده‌ایم. برای یادآوری، از هر کدام یک نمونه رسم می‌کنیم.

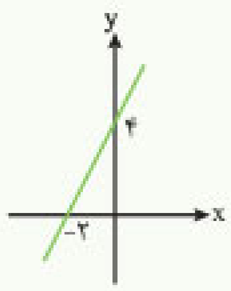
سؤال نمودار تابع خطی $y=2x+4$ را رسم و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

جواب روش رسم: دو نقطه روی خط به دلخواه انتخاب می‌کنیم. (بهتر است این دو نقطه محل برخورد خط با محورهای مختصات باشند، یعنی یک بار x را برابر صفر قرار دهیم و y را پیدا کنیم و یک بار y را برابر صفر قرار دهیم و x را پیدا کنیم.)

$$y=2x+4 \begin{cases} x=0 \rightarrow y=2(0)+4=4 \\ y=0 \rightarrow 0=2x+4 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{جدول نقطه‌یابی}}$

x	۰	−۲
y	۴	۰



این دو نقطه را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم و به کمک آن‌ها نمودار خط را رسم می‌کنیم:

دامنه و برد تابع خطی $y=2x+4$ هر دو، برابر $\mathbb{R}$ است. $(R_f=\mathbb{R}$ و $D_f=\mathbb{R})$

سؤال نمودار تابع سهمی با ضابطهٔ $y=x^2-4x+3$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

جواب روش رسم: مختصات رأس سهمی $S(x_S\ ,\ y_S)$ را از روابط $x_S=\frac{-b}{2a}$ و $y_S=\frac{-\Delta}{4a}$ پیدا می‌کنیم؛ سپس دو نقطهٔ کمکی در اطراف رأس سهمی پیدا می‌کنیم و به کمک این نقطه‌ها نمودار سهمی را رسم می‌کنیم. (بهتره محل برخورد سهمی با محورهای مختصات هم مشخص باشه.)

$$y=x^2-4x+3 \begin{cases} x_S=\frac{-b}{2a} \rightarrow x_S=\frac{-(-4)}{2(1)}=\frac{4}{2}=2 \\ y_S=\frac{-\Delta}{4a} \rightarrow y_S=\frac{-((-4)^2-4(1)(3))}{4(1)}=\frac{-4}{4}=-1 \end{cases} \Rightarrow S(2\ ,-1)$$

توجه کنید که یه روش دیگه برای پیداکردن y_S اینه که x_S رو به دست بیاریم و توی ضابطهٔ $y=x^2-4x+3$ قرار بدیم تا y_S به دست بیاد.

جدول نقطه‌یابی:

x	۰	۲ (رأس سهمی)	۴
y	۳	−۱	۳

دقت کنید: دو نقطهٔ کمکی را به‌صورت مقابل پیدا می‌کنیم:

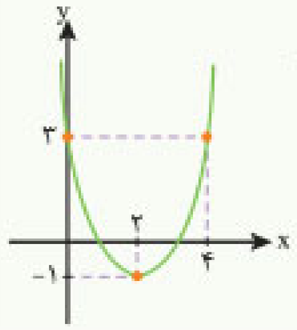
$$y=x^2-4x+3 \begin{cases} \xrightarrow{x=0} y=(0)^2-4(0)+3=3 \Rightarrow (0\,,3) \\ \xrightarrow{x=4} y=(4)^2-4(4)+3=3 \Rightarrow (4\,,3) \end{cases}$$

نکته: اگر طول نقاط کمکی که در نظر می‌گیریم، به فاصلهٔ یکسان از طول رأس سهمی باشند، عرض هایشان یکسان است.

این سه نقطه را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم و به کمک آن‌ها سهمی را رسم می‌کنیم:

با توجه به نمودار رسم‌شده، دامنهٔ این سهمی، برابر $\mathbb{R}$ و برد آن بازهٔ $[-1,+\infty)$ است.

$$(R_f=[-1\,,+\infty) \text{ و } D_f=\mathbb{R})$$



سؤال نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(x+1)^2+2$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

جواب روش رسم: به کمک انتقال‌های افقی و عمودی از روی نمودار $y=x^2$، آن را رسم می‌کنیم.

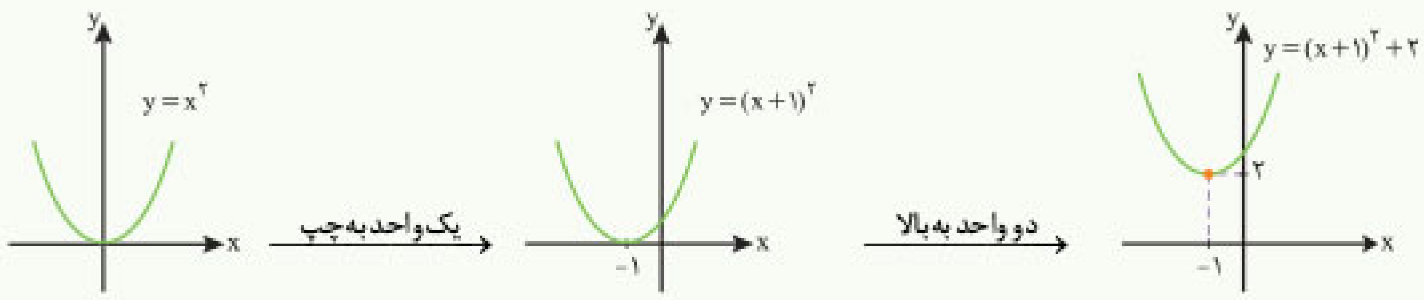
رسم به کمک انتقال را در سال دهم یاد گرفته‌اید:

① $y=(x+k)^2$ $\begin{cases} k>0: \text{نمودار } y=x^2 \text{، } k \text{ واحد به سمت چپ می‌رود.} \\ k<0: \text{نمودار } y=x^2 \text{، } |k| \text{ واحد به سمت راست می‌رود.} \end{cases}$

② $y=x^2+k$ $\begin{cases} k>0: \text{نمودار } y=x^2 \text{، } k \text{ واحد به بالا می‌رود.} \\ k<0: \text{نمودار } y=x^2 \text{، } |k| \text{ واحد به پایین می‌رود.} \end{cases}$

③ $y=-(x+k)^2$ $\begin{cases} k>0: \text{نمودار } y=-x^2 \text{، } k \text{ واحد به چپ می‌رود.} \\ k<0: \text{نمودار } y=-x^2 \text{، } |k| \text{ واحد به راست می‌رود.} \end{cases}$

④ $y=-x^2+k$ $\begin{cases} k>0: \text{نمودار } y=-x^2 \text{، } k \text{ واحد به بالا می‌رود.} \\ k<0: \text{نمودار } y=-x^2 \text{، } |k| \text{ واحد به پایین می‌رود.} \end{cases}$



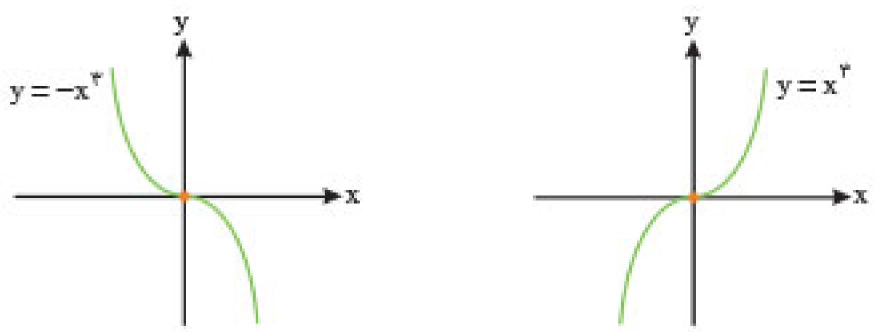
با توجه به نمودار، $D_f=\mathbb{R}$ و $R_f=[2\,,+\infty)$ است.

تابع درجه ۳

تعریف: تابع چندجمله‌ای با ضابطهٔ $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$، یک تابع چندجمله‌ای از درجه ۳ است. هم دامنه و هم برد این تابع، $\mathbb{R}$ است.

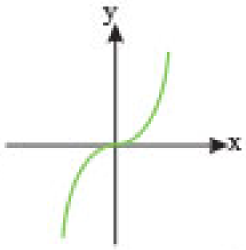
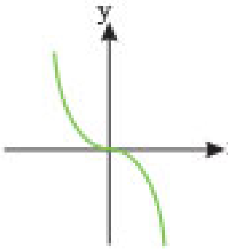
(از روی نمودارهاشون معلومه!)

نمودارهای $y=x^3$ و $y=-x^3$ به‌صورت زیر هستند: (می‌تونی چندتا نقطه روش مشخص کنی تا به همین نمودارها برسی)



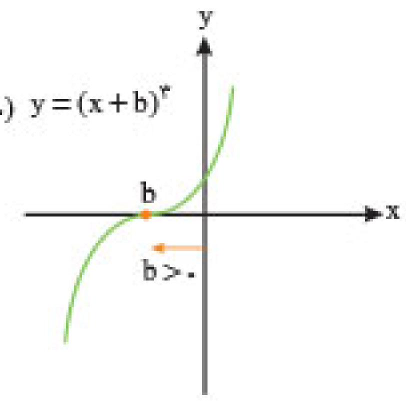
● **رسم نمودار تابع چندجمله‌ای درجه ۳ به فرم $y=a(x+b)^3+c$**

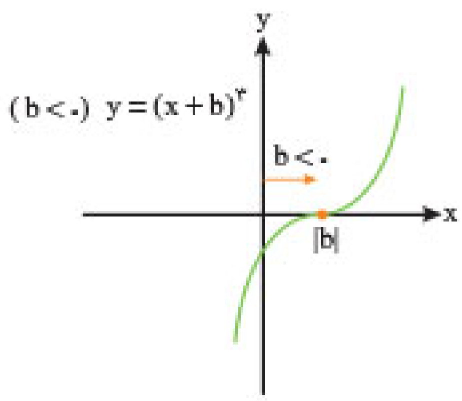
نمودار توابع درجه ۳ به فرم $y=a(x+b)^3+c$ را به کمک انتقال و تقارن از روی نمودار تابع $y=x^3$ رسم می‌کنیم. برای این کار، نیاز است پارامترهای a، b و c را بشناسیم:

a: اگر $a>0$ باشد، نمودار تابع درجه ۳ به‌صورت  و اگر $a<0$ باشد، نمودار تابع درجه ۳ به‌صورت  است.

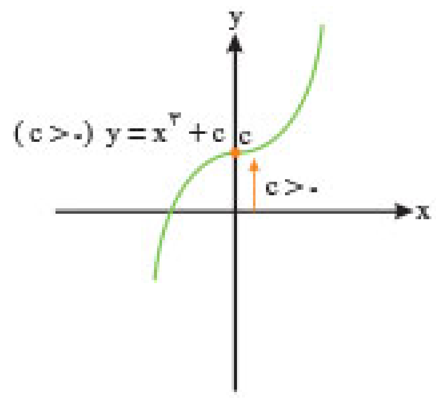
در ادامه می‌خونیم اگه $a > 0$ باشه، تابع درجه ۳، اکیداً صعودی و اگه $a < 0$ باشه، این تابع اکیداً نزولی است.

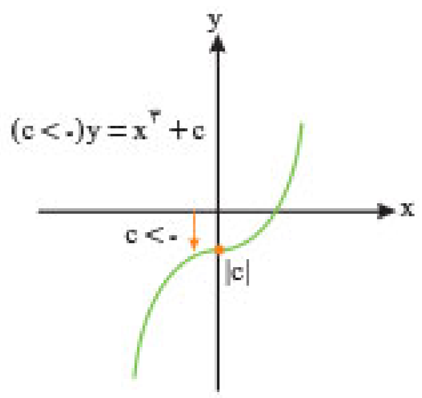
b: اگر $b > 0$ باشد، نمودار تابع درجه ۳ به اندازهٔ b واحد به سمت چپ می‌رود و اگر $b < 0$ باشد، نمودار آن به اندازهٔ $|b|$ واحد به سمت راست می‌رود:





c: اگر $c > 0$ باشد، نمودار تابع درجه ۳ به اندازهٔ c واحد به بالا می‌رود و اگر $c < 0$ باشد، نمودار آن به اندازهٔ $|c|$ واحد به پایین می‌آید:





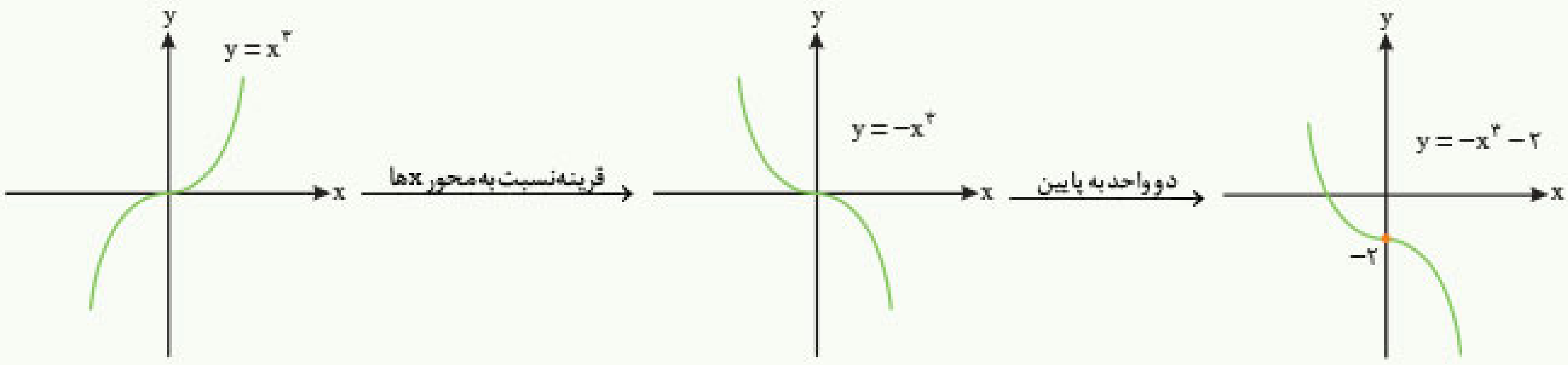
تذکر: بهتر است ترتیب انتقال‌ها برای رسم نمودار تابع $y = a(x+b)^3 + c$ به‌صورت مقابل باشد:

$$y = \underset{(2)}{a}(x + \underset{(1)}{b})^3 + \underset{(3)}{c}$$

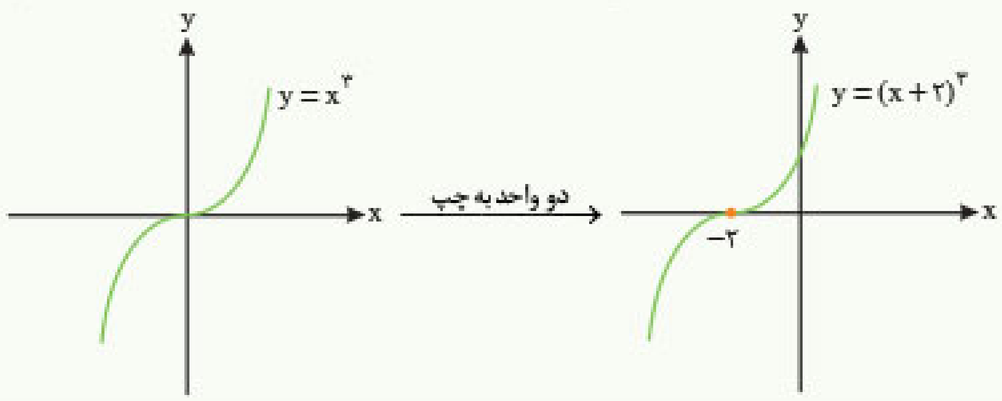
سؤال با استفاده از نمودار تابع $y = x^3$، نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد هر یک را مشخص کنید. **(فعالیت کتاب درسی)**

الف) $y = -x^3 - 2$ ب) $y = (x+2)^3$ پ) $y = -(x-2)^3$

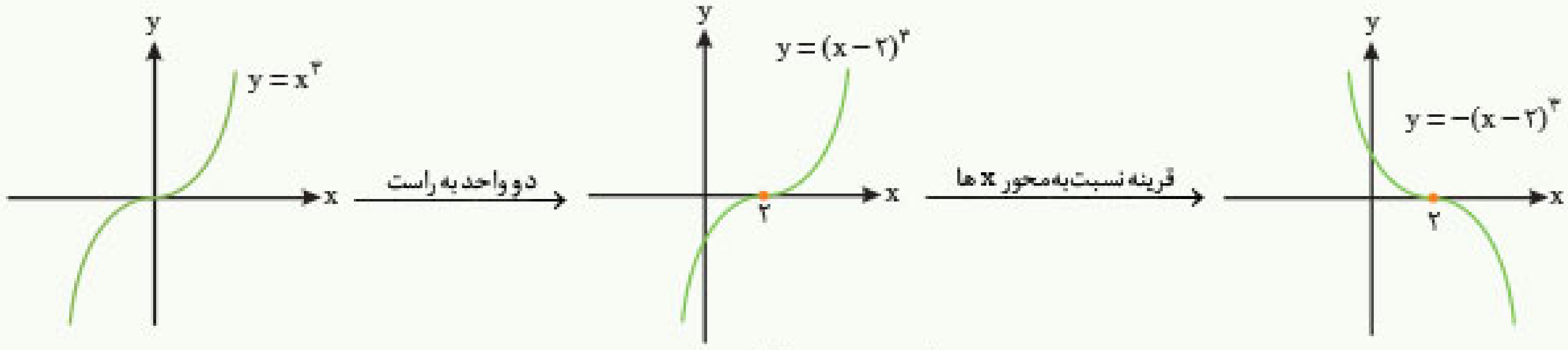
جواب الف) نمودار $y = -x^3 - 2$ را از روی نمودار $y = x^3$ طبق مراحل زیر، رسم می‌کنیم:



ب) برای رسم نمودار $y = (x+2)^3$ از روی نمودار $y = x^3$، کافی است نمودار $y = x^3$ را ۲ واحد به سمت چپ ببریم:



پ) برای رسم نمودار $y=-(x-۲)^۳$ ، ابتدا نمودار $y=x^۳$ را ۲ واحد به سمت راست می‌بریم و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم:



همان‌طور که در نمودارها نیز مشخص است، دامنه و برد در همهٔ موارد برابر $\mathbb{R}$ است.

● رسم نمودار تابع چندجمله‌ای درجه ۳ به فرم $y=ax^۳+bx^۲+cx+d\,(a\neq ۰)$

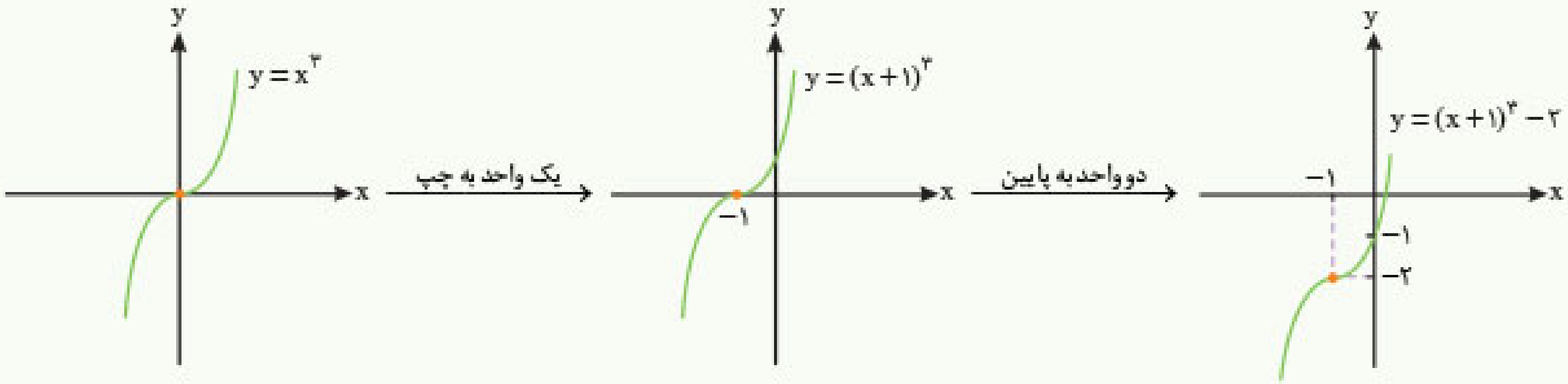
برای رسم نمودار توابع درجه ۳ به فرم $y=ax^۳+bx^۲+cx+d(a\neq ۰)$ ، ابتدا سعی می‌کنیم ضابطهٔ داده‌شده را با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای به شکل $y=a(x+b)^۳+c$ تبدیل کنیم و سپس به کمک انتقال، نمودار آن را رسم کنیم.

سؤال نمودار تابع $y=x^۳+۳x^۲+۳x-۱$ را رسم کنید.

جواب به ضابطهٔ تابع، ۱ واحد اضافه و کم می‌کنیم: $y=(x^۳+۳x^۲+۳x+۱)-۱-۱\Rightarrow y=(x+۱)^۳-۲$

حال برای رسم نمودار تابع $y=(x+۱)^۳-۲$ از روی نمودار تابع $y=x^۳$ به‌ترتیب، انتقال‌های زیر را انجام می‌دهیم:

[۱] یک واحد آن را به چپ می‌بریم. [۲] دو واحد نمودار را پایین می‌آوریم.



سؤال نمودار تابع $y=-x^۳+۶x^۲-۱۲x+۹$ را رسم کنید.

جواب به جای عدد ۹، می‌نویسیم ۱ + ۸ ؛ بنابراین داریم: $y=\underbrace{-x^۳+۶x^۲-۱۲x+۸}_{-(x-۲)^۳}+۱=-(x-۲)^۳+۱$

برای رسم نمودار $y=-(x-۲)^۳+۱$ از روی نمودار تابع $y=x^۳$ ، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

● مقایسهٔ نمودار توابع $y=x^۲$ و $y=x^۳$

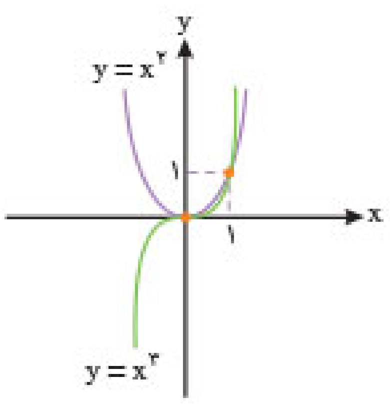
با رسم نمودار دو تابع در یک دستگاه مختصات، به نکات زیر می‌رسیم:

[۱] این دو تابع در نقاط (۰ , ۰) و (۱ , ۱) با هم برابر هستند.

[۲] در x های منفی، همیشه نمودار $y=x^۲$ بالاتر از نمودار $y=x^۳$ قرار دارد.

[۳] در x های مثبت، دو حالت داریم: الف) در بازهٔ (۰ , ۱) ، نمودار $y=x^۳$ پایین‌تر از نمودار $y=x^۲$ قرار دارد.

ب) در بازهٔ $(۱,+\infty)$ نمودار $y=x^۳$ بالاتر از نمودار $y=x^۲$ قرار دارد.



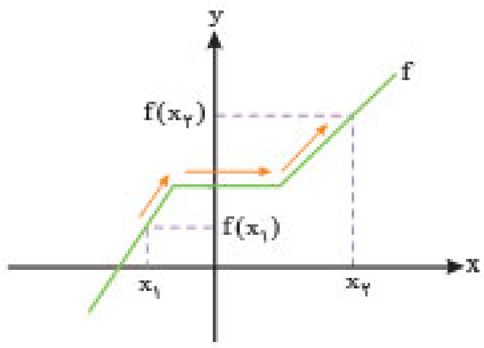
$x\in(۰,۱)\Rightarrow x^۳<x^۲$

مشاوره نهایی: بیشتر از بازهٔ (۰،۱) توی نهایی سؤال میاد!

توجه: اعداد بین صفر و یک هر چه به توان عدد بزرگ‌تری برسند، مقدارشان کمتر می‌شود، به زبان ریاضی:

توابع صعودی و نزولی

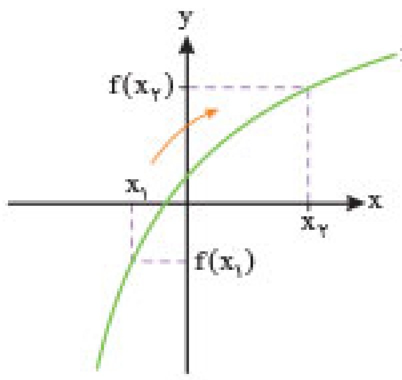
تابع صعودی



تعریف: اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از دامنهٔ تابع f که $x_1<x_2$، داشته باشیم $f(x_1)\leq f(x_2)$، آن‌گاه f را تابعی صعودی می‌نامیم.

از لحاظ نموداری، تابعی صعودی است که با حرکت از چپ به راست روی نمودار، هیچ‌وقت رو به پایین حرکت نکنیم. (با افزایش مقدار x، مقدار f یا زیاد شود یا ثابت بماند.)

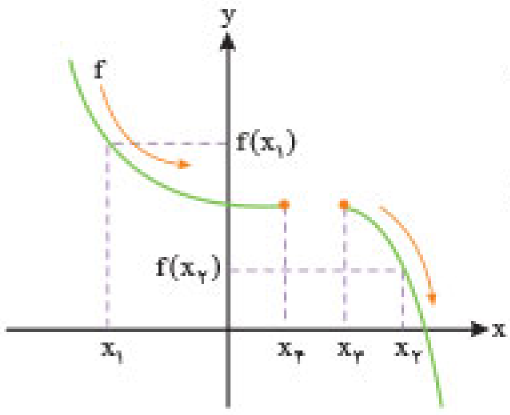
تابع اکیداً صعودی



تعریف: اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از دامنهٔ تابع f که $x_1<x_2$، داشته باشیم $f(x_1)<f(x_2)$، آن‌گاه f را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.

از لحاظ نموداری، تابعی اکیداً صعودی است که با حرکت از چپ به راست روی نمودار، همواره رو به بالا حرکت کنیم. (با افزایش x، مقدار f همواره زیاد می‌شود.)

تابع نزولی

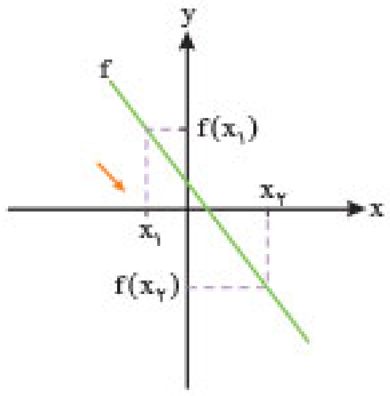


تعریف: اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از دامنهٔ تابع f که $x_1<x_2$، داشته باشیم $f(x_1)\geq f(x_2)$، آن‌گاه f را تابعی نزولی می‌نامیم.

از لحاظ نموداری، تابعی نزولی است که وقتی از چپ به راست روی نمودار حرکت می‌کنیم، اصلاً رو به بالا حرکت نکنیم. (با افزایش x، مقدار f یا کم شود یا ثابت بماند.)

دقت کنید: در نقاط x_3 و x_4، مقدار f ثابت مانده است.

تابع اکیداً نزولی



تعریف: اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از دامنهٔ تابع f که $x_1<x_2$، داشته باشیم $f(x_1)>f(x_2)$، آن‌گاه f را تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.

از لحاظ نموداری، تابعی اکیداً نزولی است که وقتی از چپ به راست روی نمودار حرکت می‌کنیم، همیشه رو به پایین برویم. (یعنی با افزایش مقدار x، مقدار f همواره کم شود.)

توی تعریف‌های بالا، به علامت‌های نامساوی‌ها دقت کنید. اونایی که $>$ یا $<$ هستند، کلمهٔ «اکیداً» رو دارند و اونایی که $\leq$ یا $\geq$ هستند، کلمهٔ «اکیداً» رو ندارند.

جمع‌بندی:

صعودی	$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$	با افزایش x، $f(x)$ زیاد می‌شود یا ثابت می‌ماند.
اکیداً صعودی	$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$	با افزایش x، $f(x)$ همواره زیاد می‌شود.
نزولی	$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$	با افزایش x، $f(x)$ کم می‌شود یا ثابت می‌ماند.
اکیداً نزولی	$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$	با افزایش x، $f(x)$ همواره کم می‌شود.

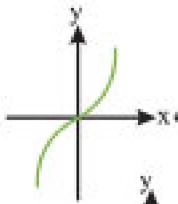
نکته: تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود. (این نکته، بارها و بارها سؤال امتحان نهایی بوده!)

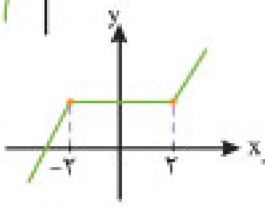
توابع یکنوا، اکیداً یکنوا و غیریکنوا

تعریف: • به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا نزولی باشد، تابع یکنوا می‌گوییم.

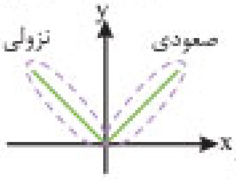
• به تابعی که در یک بازه فقط اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا می‌گوییم.

نکته: توابع اکیداً یکنوا همواره یکنوا هستند؛ یعنی تابع اکیداً صعودی، صعودی هم هست و تابع اکیداً نزولی، نزولی هم هست، ولی عکس این موضوع درست نیست؛ یعنی ممکن است یک تابع یکنوا، اکیداً یکنوا نباشد.

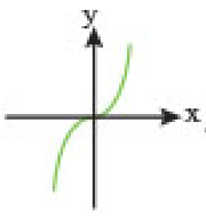
برای نمونه، تابع $y = x^3$ را در نظر بگیرید. نمودار $y = x^3$ به‌صورت  است. این تابع روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی (اکیداً یکنوا) است؛ همچنین می‌توان گفت

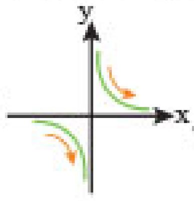
این تابع روی $\mathbb{R}$ صعودی (یکنوا) است. حال تابعی با نمودار  را در نظر بگیرید. این تابع صعودی (یکنوا) است؛ ولی اکیداً صعودی (اکیداً یکنوا) نیست.

تعریف: اگر تابعی در یک بازه نه صعودی و نه نزولی باشد، می‌گوییم آن تابع غیریکنوا است.

برای نمونه تابع $y = |x|$ با نمودار 

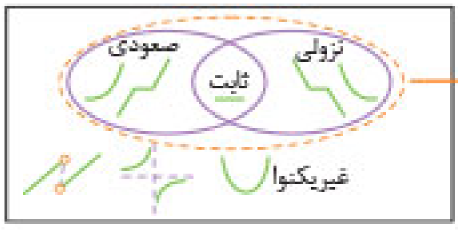
روی $\mathbb{R}$ غیر یکنوا است.

نکته: اگر تابعی اکیداً یکنوا باشد، حتماً یک‌به‌یک نیز هست، ولی عکس این موضوع درست نیست؛ برای نمونه تابع $y = x^3$ با نمودار 

اکیداً یکنوا و یک‌به‌یک است، امّا تابع $y = \frac{1}{x}$ با نمودار  یک‌به‌یک است، ولی اکیداً یکنوا نیست. تابع $y = \frac{1}{x}$ در بازهٔ $(-\infty, 0)$ اکیداً نزولی

است؛ همچنین در بازهٔ $(0, +\infty)$ هم اکیداً نزولی است، امّا در کل غیریکنوا است.

نتیجه: اگر تابعی یک‌به‌یک نباشد، حتماً اکیداً یکنوا نیست.

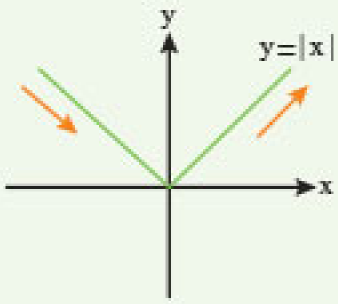


مشاوره نهایی: تعریف‌ها و نکات بالا رو حتماً بارها و بارها بخونید و به خاطر بسپارید. از این قسمت، سؤالای زیادی به‌صورت جای خالی و درست و نادرست توی امتحان نهایی سال‌های اخیر طرح شده.

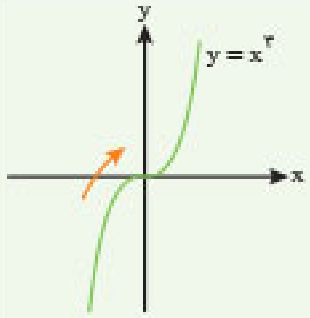
برای این‌که بتونی تو یه نگاه، مطالب بالا رو مرور کنی، به نمودار روبه‌رو دقت کن:

توابع مهمی که باید نمودار آن‌ها را بشناسید، در جدول زیر آورده‌ایم و آن‌ها را از نظر یکنوایی بررسی کرده‌ایم. (تمرین‌ها و مثال‌های مهم کتاب رو یک‌جا توی این جدول ببین.)

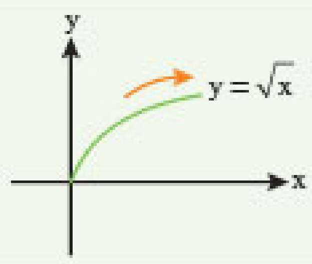
الف) تابع $y = |x|$ در بازهٔ $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است؛ ولی در $\mathbb{R}$ نه صعودی و نه نزولی است (غیریکنواست).



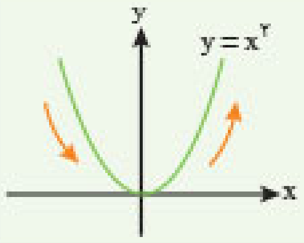
ب) تابع $y = x^3$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ اکیداً صعودی است؛ در نتیجه اکیداً یکنوا است.



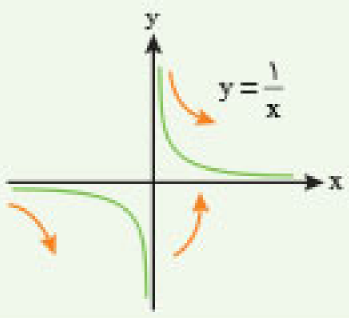
پ) تابع $y = \sqrt{x}$ در دامنه‌اش، یعنی بازهٔ $[0, +\infty)$، اکیداً صعودی است؛ در نتیجه اکیداً یکنوا است.



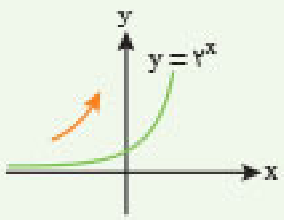
ت) تابع $y = x^2$ در بازهٔ $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است؛ ولی روی $\mathbb{R}$ نه صعودی و نه نزولی است (غیریکنواست).



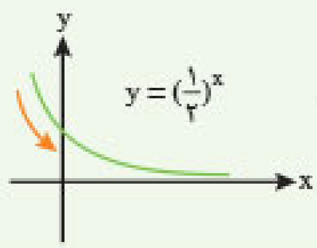
ث) تابع $y = \frac{1}{x}$ در بازهٔ $(-\infty, 0)$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $(0, +\infty)$ نیز اکیداً نزولی است؛ ولی روی $\mathbb{R}$ اکیداً یکنوا نیست (در کل غیریکنواست). از چپ به راست، نمودار رفته پایین، یهویی برگشته بالا و دوباره رفته پایین!



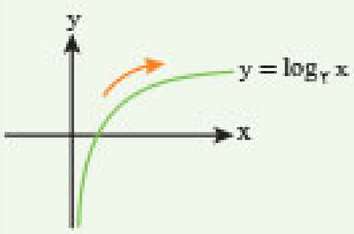
ج) تابع $y = 2^x$ در بازهٔ $(-\infty, +\infty)$ اکیداً صعودی، در نتیجه اکیداً یکنوا است (به‌طور کلی توابع نمایی به‌صورت $y = a^x$ که در آن $a > 1$ است، روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی هستند.)؛ پس 3^x و 4^x و... همین‌طور هستند. یه چیز بگم؟ اگه این تابع‌ها رو انتقال هم بدی، یعنی چپ و راست و بالا و پایین هم ببریشون، بازهم اکیداً صعودی هستند.



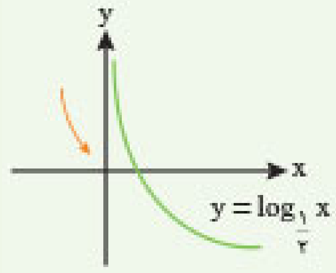
چ) تابع $y = (\frac{1}{2})^x$ در بازهٔ $(-\infty, +\infty)$ اکیداً نزولی، در نتیجه اکیداً یکنوا است. (به‌طور کلی توابع نمایی به‌صورت $y = a^x$ که در آن $0 < a < 1$ است، روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی هستند.)



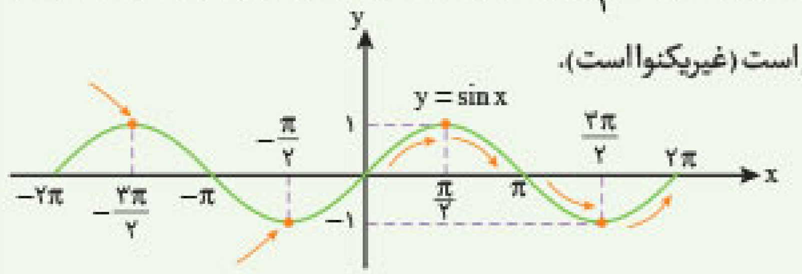
ح) تابع $y = \log_2 x$ در بازهٔ $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی، در نتیجه اکیداً یکنوا است. (به‌طور کلی توابع لگاریتمی به‌صورت $y = \log_a x$ که در آن $a > 1$ است، روی دامنه‌اش اکیداً صعودی هستند.)



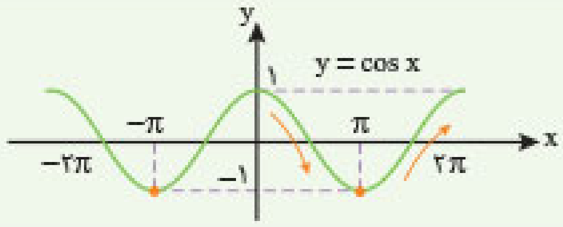
خ) تابع $y=\log_{\frac{۱}{۲}} x$ در بازهٔ $(۰, +\infty)$ اکیداً نزولی، در نتیجه اکیداً یکنوا است. (به‌طور کلی توابع لگاریتمی به‌صورت $y=\log_a x$ که در آن $۰<a<۱$ است، روی دامنه‌اش اکیداً نزولی هستند.)



د) تابع $y=\sin x$ در بازهٔ $[۰, \frac{\pi}{۲}]$ اکیداً صعودی، در بازهٔ $[\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}]$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[\frac{۳\pi}{۲}, ۲\pi]$ اکیداً صعودی است؛ ولی روی $\mathbb{R}$ نه صعودی و نه نزولی است (غیریکنوا است).



ذ) تابع $y=\cos x$ در بازهٔ $[۰, \pi]$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[\pi, ۲\pi]$ اکیداً صعودی است؛ ولی روی $\mathbb{R}$ نه صعودی و نه نزولی است (غیریکنوا است).

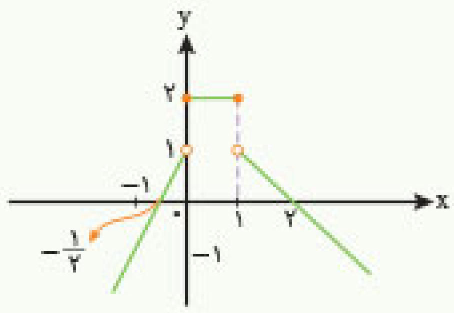


سؤال نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی هستند. (مشابه تمرین کتاب درسی)

الف) $f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & ; \quad x<۰ \\ ۲ & ; \quad ۰\le x\le ۱ \\ -x+۲ & ; \quad x>۱ \end{cases}$

ب) $y=[x] \; ; \; x\in[-۱, ۲)$

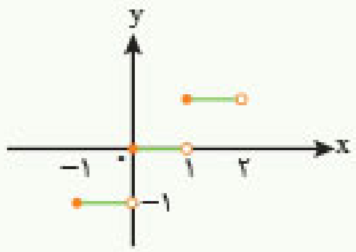
جواب الف) این تابع، یک تابع چندضابطه‌ای است. نمودار تابع خطی $y=۲x+۱$ را در بازهٔ $(-\infty, ۰)$ رسم می‌کنیم. f در بازهٔ $[۰, ۱]$ تابع ثابت ۲ است؛ خط $y=-x+۲$ را نیز در بازهٔ $(۱, +\infty)$ رسم می‌کنیم. طبق نمودار، مشاهده می‌کنیم که تابع در بازهٔ $(-\infty, ۱]$ صعودی و در بازهٔ $[۰, +\infty)$ نزولی است.



دقت کنید: تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است.

اگه می‌گفت توی چه بازه‌ای اکیداً صعودی است، می‌گفتیم کل بازهٔ $(-\infty,۰]$ و اگه می‌گفت توی چه بازه‌ای اکیداً نزولی است، می‌گفتیم بازهٔ $[۱,+\infty)$!

ب) نمودار تابع $y=[x]$ در بازهٔ $[-۱, ۲)$ به‌صورت مقابل است. با توجه به نمودار، این تابع در کل این بازه، صعودی است. توجه کنید تابع روی بازه‌های $[-۱,۰)$، $[۰,۱)$ و $[۱,۲)$ نزولی هم هست (زیرا تابع ثابت است.)



نکته: کاربرد یکنوایی توابع در حل نامعادلات:

۱ اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی باشد و $f(a)<f(b)$، آن‌گاه $a<b$.

۲ اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد و $f(a)<f(b)$، آن‌گاه $a>b$.

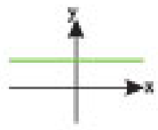
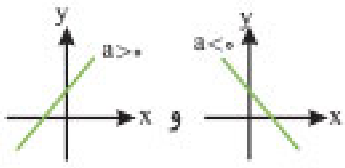
یعنی توی توابع اکیداً صعودی می‌تونیم fها رو از طرفین نامعادله حذف کنیم؛ ولی توی توابع اکیداً نزولی اگه fها رو از طرفین نامعادله خط بزنیم، باید جهت عوض بشه!

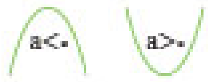
حفظیات:

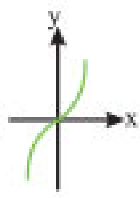
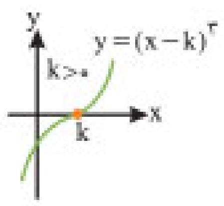
- دامنهٔ توابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ است.
- برد توابع چندجمله‌ای با درجهٔ فرد، برابر $\mathbb{R}$ است.
- دامنه و برد تابع چندجمله‌ای درجه ۳، برابر $\mathbb{R}$ است.
- نمودار تابع $y=x^۳$ در بازهٔ $(۰, ۱)$، پایین‌تر از نمودار تابع $y=x^۲$ قرار می‌گیرد.
- تابع ثابت، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.
- به تابعی که در یک بازه فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا می‌گوییم.
- به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا نزولی باشد، تابع یکنوا می‌گوییم.
- توابع اکیداً یکنوا، همواره یکنوا هستند.
- توابع یکنوا، لزوماً اکیداً یکنوا نیستند.
- به توابعی که نه صعودی و نه نزولی باشند، غیریکنوا می‌گوییم.
- همهٔ توابع اکیداً یکنوا، یک‌به‌یک هستند.
- لزومی ندارد هر تابع یک‌به‌یک حتماً اکیداً یکنوا باشد.

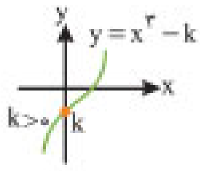
خلاصهٔ نموداری درس ۱

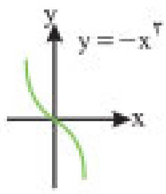
توابع چندجمله‌ای

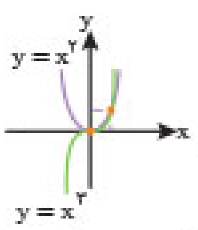
- **تعریف:** هر تابع به‌صورت $y=ax^{n}+bx^{n-1}+\cdots+c$ که در آن، n عدد صحیح نامنفی و ضرایب، اعداد حقیقی هستند $(a\neq 0)$.
- **دامنه:** $\mathbb{R}$
- **برد:** برد توابع چندجمله‌ای با درجهٔ فرد، برابر $\mathbb{R}$ است.
- **مهم‌ترین توابع چندجمله‌ای**
  - **تابع ثابت**
    - **ضابطه:** $y=k$
    - نمودار آن به‌صورت  است.
    - **دامنه:** $\mathbb{R}$
    - **برد:** $\{k\}$
  - **تابع خطی (درجه ۱)**
    - **ضابطه:** $y=ax+b$ $(a\neq 0)$
    - نمودار آن به‌صورت  است.

    - **دامنه:** $\mathbb{R}$
    - **برد:** $\mathbb{R}$
  - **تابع سهمی (درجه ۲)**
    - **ضابطه**
      - $y=ax^{2}+bx+c\ (a\neq 0)$
      - $y=a(x+b)^{2}+c\ (a\neq 0)$
    - **نمودار:** 

    - **دامنه:** $\mathbb{R}$
    - **برد**
      - $[\frac{-\Delta}{4a},+\infty):a>0$
      - $(-\infty,-\frac{\Delta}{4a}]:a<0$
  - **تابع درجه ۳**
    - **ضابطه**
      - $y=ax^{3}+bx^{2}+cx+d\ (a\neq 0)$
      - $y=a(x+b)^{3}+c\ (a\neq 0)$
    - نمودار $y=x^{3}$ به صورت  است.
    - **رسم به کمک انتقال**
      - **انتقال افقی** 

      - **انتقال عمودی** 

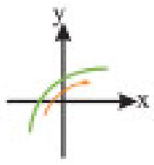
      - **قرینه‌کردن** 

    - مقایسه با نمودار $y=x^{2}$ 

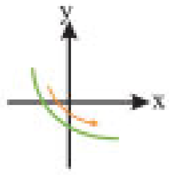
      - در بازهٔ $(0,1)$، نمودار $y=x^{3}$ پایین‌تر از نمودار $y=x^{2}$ قرار می‌گیرد.

توابع صعودی و نزولی

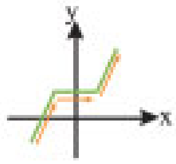
- **اکیداً یکنوا**
  - **اکیداً صعودی**
    - **تعریف:** $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$
    - **نمودار:** با حرکت از چپ به راست، همواره رو به بالا حرکت می‌کنیم.



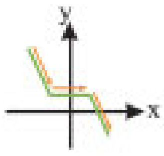
  - **اکیداً نزولی**
    - **تعریف:** $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$
    - **نمودار:** با حرکت از چپ به راست، همواره رو به پایین حرکت می‌کنیم.



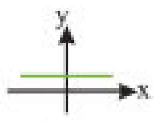
- **یکنوا**
  - **صعودی**
    - **تعریف:** $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \ge f(x_1)$
    - **نمودار:** با حرکت از چپ و راست، هیچ‌گاه رو به پایین حرکت نمی‌کنیم.



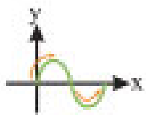
  - **نزولی**
    - **تعریف:** $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \le f(x_1)$
    - **نمودار:** با حرکت از چپ به راست، هیچ‌گاه رو به بالا حرکت نمی‌کنیم.

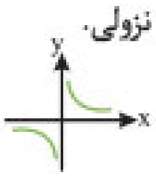


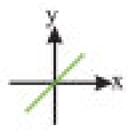
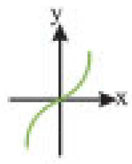
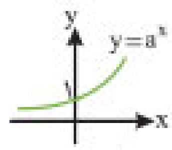
  - **ثابت:** تابع ثابت هم صعودی است و هم نزولی!

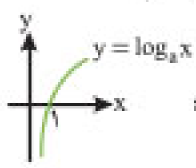


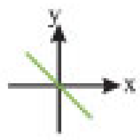
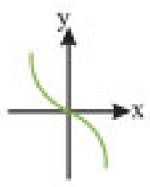
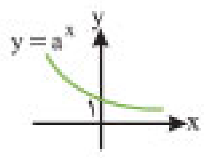
- **غیریکنوا**

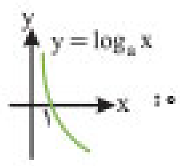


  - **تعریف:** تابعی که روی دامنه‌اش نه صعودی است و نه نزولی.
  - مهم‌ترین تابع غیریکنوا $y = \frac{1}{x}$ که نمودار آن به‌صورت  است.

- **مهم‌ترین توابع اکیداً یکنوا**
  - **اکیداً صعودی**
    - $y = ax + b$ با شرط $a > 0$: 
    - $y = x^3$: 
    - $y = a^x$ با شرط $a > 1$: 

    - $y = \log_a x$ با شرط $a > 1$: 

  - **اکیداً نزولی**
    - $y = ax + b$ با شرط $a < 0$: 
    - $y = -x^3$: 
    - $y = a^x$ با شرط $0 < a < 1$: 

    - $y = \log_a x$ با شرط $0 < a < 1$: 

سؤالات امتحانی

سؤالات درست و نادرست

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۱. تابع $y=2x(1-3x^2)+1$ ، یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ سوم است. (دی ۱۴۰۱)

۲. تابع $y=\sqrt{3}x^3-\pi x+1$ ، یک تابع چندجمله‌ای است. (شهریور ۱۴۰۲)

۳. تابع $y=\sqrt{2}x^3-\frac{3}{4}x$ ، یک چندجمله‌ای از درجه ۳ است. (مشابه خرداد ۱۴۰۱، دی ۱۴۰۰)

۴. دامنهٔ توابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ است. (شهریور ۱۴۰۰)

۵. تابع $f(x)=\sin x+5x^2$ ، یک تابع چندجمله‌ای است. (دی ۹۹ - خارج)

۶. تابع $y=2x^5-4x^3+\sqrt{7}x$ ، یک تابع چندجمله‌ای نیست. (خرداد ۹۹ - خارج)

۷. اگر $f(x)=x^3$ و $g(x)=(x-3)^3$ ، نمودار g را می‌توان از نمودار f با انتقال سه واحد به سمت راست به دست آورد. (دی ۹۸ - خارج)

۸. برد تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^3+1$ برابر $\mathbb{R}$ است.

۹. تابع $y=\frac{1}{x}$ در دامنه‌اش یکنواست. (شهریور ۱۴۰۲)

۱۰. بی‌شمار تابع وجود دارد که هم صعودی و هم نزولی است. (خرداد ۱۴۰۲)

۱۱. تابع $f(x)=-1-x^3$ در دامنهٔ خود، اکیداً نزولی است.

۱۲. هر تابع اکیداً یکنوا، یک‌به‌یک است.

۱۳. هر تابع یکنوا، یک‌به‌یک است. (دی ۱۴۰۱)

۱۴. تابع $f(x)=x^2$ ، تابعی اکیداً صعودی است. (خرداد ۱۴۰۱)

۱۵. تابع $y=-x^3+2$ در دامنهٔ تعریفش صعودی است. پُرتکرار (مشابه دی ۱۴۰۰- خارج، مشابه خرداد ۱۴۰۰ - خارج، شهریور ۹۸)

۱۶. تابع $y=(\frac{1}{2})^x$ در دامنهٔ خود، یک تابع اکیداً نزولی است. (شهریور ۱۴۰۰ - خارج)

۱۷. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ در دامنه‌اش، اکیداً نزولی است. (شهریور ۱۴۰۰)

۱۸. تابع $f(x)=|x|$ در بازهٔ $(0,+\infty)$ ، صعودی اکید است. (دی ۹۸ - خارج)

۱۹. هر تابع اکیداً یکنوا، یکنوا نیست. (دی ۹۹ - خارج)

۲۰. تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی است. (خرداد ۹۹، دی ۹۷)

۲۱. اگر برای هر دو نقطهٔ a و b از دامنهٔ f که $a<b$ است داشته باشیم $f(a)>f(b)$ ، آن‌گاه f تابعی اکیداً صعودی است.

۲۲. تابع $f(x)=\frac{-1}{x}$ روی مجموعهٔ اعداد حقیقی غیرصفر، اکیداً صعودی است.

۲۳. تابع $f=\{(-3,1),(-4,0),(2,5),(0,m)\}$ به‌ازای ۵ عدد صحیح مختلف برای m صعودی است.

+۲۰ ۲۴. تابع $f(x)=|x-1|+|x-2|$ روی بازهٔ $(2,+\infty)$ ، اکیداً صعودی است.

۲۵. تابع $y=[x]$ در بازهٔ $(-2,2)$ ، اکیداً یکنوا است.

+۲۰ ۲۶. اگر f تابعی اکیداً نزولی باشد و داشته باشیم $f(2x)>f(x-1)$ ، آن‌گاه $x>-1$ است.

سؤالات جای خالی

جاهای خالی را با کلمات یا اعداد مناسب پر کنید.

۲۷. تابع $f(x)=2x(x-x^2+2)+2x^3$ یک تابع چندجمله‌ای از درجه ...... است.

۲۸. در بازهٔ $(0,1)$ ، نمودار تابع $y=x^3$ ، ...... از نمودار تابع $y=x^2$ قرار دارد. پُرتکرار (دی ۱۴۰۱، دی ۱۴۰۰، دی ۹۹)

۲۹. تابع $y=(x+1)^3$ در دامنهٔ تعریف خود ...... (صعودی / نزولی) است. (خرداد ۹۸)

۳۰. نمودار تابع $y=1-(x-2)^3$ از ناحیهٔ ...... محورهای مختصات عبور نمی‌کند.

۳۱. تابعی که در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود، تابع .... نامیده می‌شود. (خرداد ۹۹-خارج، دی ۹۸)

۳۲. توابع اکیداً یکنوا، همواره .... هستند. (شهریور ۹۹)

۳۳. تابع $y = x^2 - 4x + 1$ در بازهٔ .... نزولی است.

۳۴. تابع $y = x + |x|$ روی $\mathbb{R}$، تابعی .... است. (صعودی / اکیداً صعودی)

۳۵. تابع $y = x - |x|$ در بازهٔ $[a, +\infty)$، هم صعودی و هم نزولی است. حداقل مقدار a، برابر .... است.

۳۶. تابع $f(x) = x^2 |x|$ در بازهٔ $[a, +\infty)$، صعودی است. حداقل مقدار a، برابر .... است.

مسائل

۳۷. به کمک نمودار تابع $y = x^3$، نمودار توابع زیر را رسم کنید و سپس دامنه و برد هر یک از آن‌ها را مشخص کنید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

الف) $y = (x+1)^3 - 2$ ب) $y = -(x-1)^3 + 1$ پ) $y = -x^3 + 2$ ت) $y = (-x+2)^3 - 3$

مقایسهٔ نمودارهای $y=x^2$ و $y=x^3$ درکتاب درسی اومده؛ در همین راستا دو سؤال زیر رو بررسی کنید:

۳۸. نمودار توابع $y = x$، $y = x^2$، $y = x^3$ و $y = x^4$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید: (مشابه فعالیت کتاب درسی)

الف) در کدام بازه‌ها، نمودار $y = x^3$ پایین‌تر از نمودارهای توابع $y = x^2$ و $y = x$ قرار می‌گیرد؟

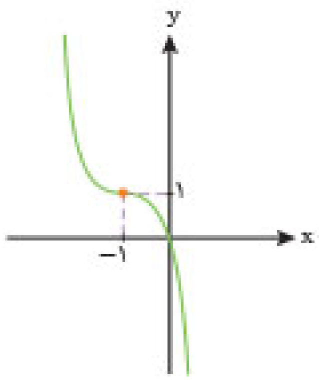
ب) در کدام بازه‌ها، نمودار تابع $y = x$ پایین‌تر از نمودارهای توابع $y = x^2$ و $y = x^3$ قرار می‌گیرد؟

۳۹. با رسم نمودار توابع $y = -x^2$، $y = -x^3$ و $y = -x^4$، مشخص کنید در کدام بازه (ها) نمودار تابع $y = -x^3$ پایین‌تر از نمودار تابع $y = -x^2$ قرار می‌گیرد؟

توی رسم توابع درجه ۳ به فرم $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a \neq 0)$ از اتحاد مکعب دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم.

۴۰. نمودار تابع $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ را رسم کنید.

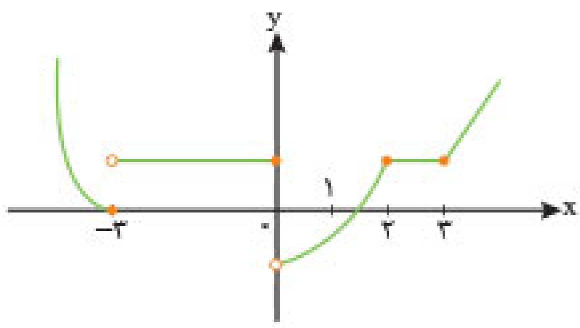
+۲۰ ۴۱. نمودار تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ به‌صورت شکل مقابل است. مقادیر a، b، c و d را مشخص کنید.



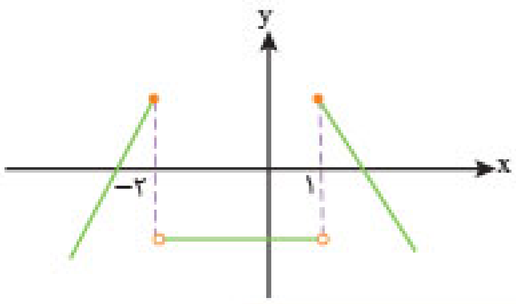
۴۲. اگر تابع $f = \{(1,2), (-2,5), (0,4), (-1,k)\}$ اکیداً نزولی باشد، حدود k را به دست آورید.

۴۳. در هر کدام از قسمت‌های زیر، مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی (صعودی)، در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی (نزولی) و در چه بازه‌هایی، هم صعودی و هم نزولی است. (مشابه تمرین کتاب درسی)

الف)



ب)



توی سؤال زیر، شرط صعودی و نزولی‌بودن چندجمله‌ای‌های درجهٔ اول و دوم و سوم رو یک‌جا بررسی می‌کنیم.

+۲۰ ۴۴. مقادیر m را طوری مشخص کنید که:

الف) تابع $y = mx + 2$، هم صعودی و هم نزولی باشد.

ب) تابع $y = -x^2 + mx + 1$ در بازهٔ $[2, +\infty)$، اکیداً نزولی باشد.

پ) تابع $y = (-9 + m^2)x^3 + 5$ روی $\mathbb{R}$، اکیداً نزولی باشد.

توی سؤالاتی که خودتون باید نمونه‌ای رسم کنید یا مثال بزنید، معمولاً بی‌شمار جواب وجود داره!

۴۵. روی بازهٔ $(0, 2)$ نمودار تابعی رسم کنید که: (مشابه تمرین کتاب درسی)

الف) اکیداً صعودی باشد. ب) اکیداً نزولی باشد. پ) غیریکنوا باشد.

۴۶. نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه‌های $(-2,0)$ و $(0,2)$ اکیداً صعودی باشد، ولی روی $(-2,2)$ اکیداً صعودی نباشد. (مشابه تمرین کتاب درسی)

در سؤال مهم زیر، اول باید بلد باشید نمودار هر یک از توابع چگونه رسم می‌شه و سپس با توجه به نمودار اون، صعودی یا نزولی‌بودن رو مشخص کنید.

۴۷. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید و سپس مشخص کنید هر کدام از آن‌ها در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند؟
(مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

الف) $y=x^3-1$ ب) $y=x^2+2x$

پ) $y=\frac{1}{x-1}$ ت) $y=|x-2|$

+۲۰ ث) $y=(x-1)|x|$ (برگرفته از کنکور تجربی اردیبهشت ۱۴۰۳)   +۲۰ ج) $y=x-\frac{x}{|x|}$

چ) $y=\sqrt{x-1}+1$ +۲۰ ح) $y=x-[x]$

۴۸. نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ و $y=\sin(x+\frac{\pi}{6})$ را در بازهٔ $[0,2\pi]$ رسم کنید و مشخص کنید هر یک از آن‌ها در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟
(مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

۴۹. نمودارهای توابع $y=2^{x-1}$ ، $y=(\frac{1}{2})^{x+1}$ و $y=-2^x$ را رسم کنید و بگویید هرکدام در کدام بازه(ها) صعودی و در کدام بازه(ها) نزولی هستند؟

۵۰. الف) نمودار تابع $y=\log_a x$ را در هر دو حالت $a>1$ و $0<a<1$ رسم کنید و یکنوایی آن‌ها را بررسی کنید.

ب) نمودار تابع $y=-\log_a x$ را در همین دو حالت رسم کنید و یکنوایی آن‌ها را بررسی کنید.

پ) با مقایسهٔ قسمت‌های «الف» و «ب»، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۵۱. نمودار تابع $y=-\log(x-2)+1$ را رسم کنید و مشخص کنید این تابع در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است؟

۵۲. نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آن تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; \quad x>2\\ 3 & ; \quad -1\le x\le 2\\ -x^2+1 & ; \quad x<-1\end{cases}$$

+۲۰ ۵۳. حدود m را طوری بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases}3x+2 & ; x\ge 1\\ x+m & ; x<1\end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی باشد.

+۲۰ ۵۴. تابع $f(x)=\begin{cases}2x-1 & ; \quad x\ge 2\\ x^2-2x+2 & ; \quad 0<x<2\\ 2 & ; \quad x\le 0\end{cases}$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ نزولی است. حداکثر مقدار a چه‌قدر است؟

کاربرد یکنوایی در حل نامعادلات رو در سؤال زیر می‌بینین.

+۲۰ ۵۵. اگر $f(a^2+1)<f(3a-1)$ و تابع f اکیداً صعودی باشد، حدود a را بیابید.

۵۶. از نامعادلهٔ $\frac{1}{27}\le 3^{2x+1}$ حدود x را بیابید.

درس ۲ ترکیب توابع

تعریف: فرض کنید f و g دو تابع باشند، به‌طوری که برد تابع f و دامنهٔ تابع g اشتراک ناتهی داشته باشند.

برای دو تابع f و g، تابع مرکبی که با نماد fog نمایش داده می‌شود، به‌صورت $(fog)(x)=f(g(x))$ تعریف می‌شود.

نحوهٔ تشکیل $(fog)(x)$: ابتدا x را به تابع g می‌دهیم، سپس مقدار به دست آمده، یعنی $g(x)$ را به تابع f می‌دهیم تا به $f(g(x))$ برسیم.

$$x\xrightarrow{g}g(x)\xrightarrow{f}f(g(x))$$

ورودی x و خروجی $(fog)(x)$ است.

سؤال الف) اگر ورودی ماشین شکل زیر $\frac{11}{2}$ باشد، خروجی آن چه‌قدر است؟ (مشابه خرداد ۱۴۰۱)

ب) اگر خروجی این ماشین $\frac{4}{3}$ باشد، ورودی آن چه‌قدر است؟

ورودی $\longrightarrow \boxed{2x-2} \longrightarrow \boxed{\frac{x}{\sqrt{x}+1}} \longrightarrow$ خروجی

جواب الف) ورودی همان x است. وقتی $x=\frac{11}{2}$ باشد، $2x-2$ برابر $2(\frac{11}{2})-2=9$ است. حال عدد ۹ را به $\frac{x}{\sqrt{x}+1}$ می‌دهیم تا خروجی به دست بیاید:

$$\frac{x}{\sqrt{x}+1}\xrightarrow{x=9}\frac{9}{\sqrt{9}+1}=\frac{9}{3+1}=\frac{9}{4}$$

پاسخ فصل اول

۱. **درست** زیرا در تابع $y=2x(1-3x^2)+1=2x-6x^3+1$ بزرگ‌ترین توان x، ۳ است.

۲. **درست** هم عدد $\sqrt{3}$ و هم عدد π، جزء ضرایب هستند و مشکلی ایجاد نمی‌کنند!

۳. **درست** تابع $y=\sqrt{2}x^2-\frac{3}{4}x$ یک دوجمله‌ای است که به دلیل وجود x^2، درجهٔ ۲ است.

۴. **درست** دامنهٔ همهٔ توابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ است.

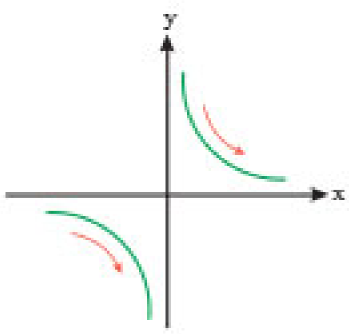
۵. **نادرست** به دلیل وجود $\sin x$، این تابع چندجمله‌ای نیست.

۶. **نادرست** $\sqrt{7}$ ضریب است. این تابع چندجمله‌ای است.

۷. **درست** x لجباز است و برعکس عمل می‌کند!

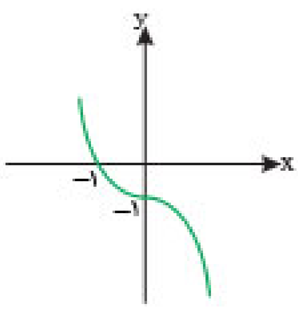
۸. **درست** برد همهٔ توابع چندجمله‌ای با درجهٔ فرد، برابر $\mathbb{R}$ است.

۹. **نادرست** با توجه به نمودار $y=\frac{1}{x}$، این تابع در دامنه‌اش غیریکنواست.



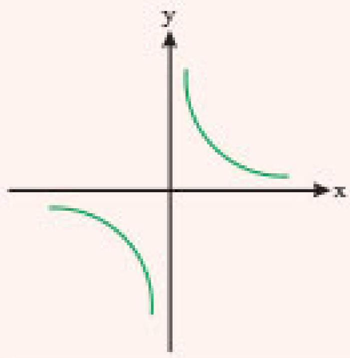
۱۰. **درست** همهٔ توابع ثابت، هم صعودی و هم نزولی هستند و بی‌شمار تابع ثابت وجود دارد.

۱۱. **درست** نمودار آن به‌صورت مقابل و روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است.

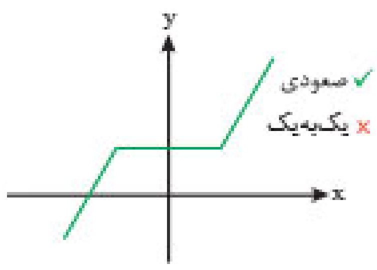


۱۲. **درست**

توجه: عکس این موضوع درست نیست. مثال نقض آن هم تابع $y=\frac{1}{x}$ است که تابعی یک‌به‌یک است؛ ولی اکیداً یکنوا نیست.

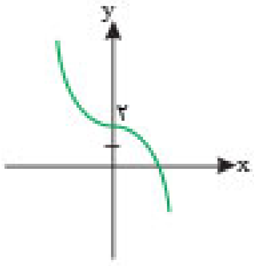


۱۳. **نادرست** تابع یکنوا یعنی تابع صعودی یا نزولی و چون در این‌گونه توابع، قسمتی از تابع می‌تواند تابع ثابت باشد، پس یک‌به‌یک نیست.

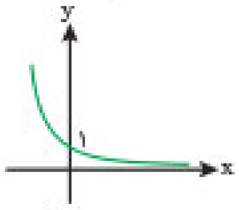


۱۴. **درست**

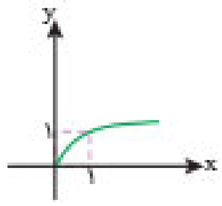
۱۵. **نادرست** نمودار $y=-x^3+2$ به‌صورت مقابل است و روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است.



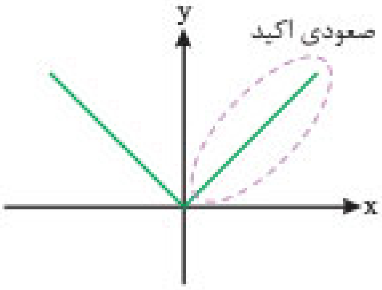
۱۶. **درست** نمودار تابع $y=(\frac{1}{2})^x$ به‌صورت مقابل است و در دامنهٔ خود اکیداً نزولی است.



۱۷. **نادرست** تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در دامنه‌اش، یعنی بازهٔ $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی و نمودار آن به‌صورت مقابل است:



۱۸. **درست** نمودار $f(x)=|x|$، به‌صورت زیر است:



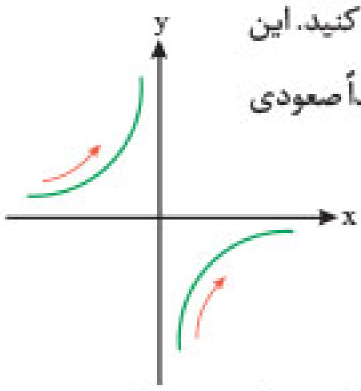
این تابع در بازهٔ $(-\infty,0]$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

۱۹. **نادرست** هر تابع یکنوا لزوماً اکیداً یکنوا نیست؛ ولی هر تابع اکیداً یکنوا، همیشه یکنوا است.

۲۰. **درست** دیگه باید کاملاً این موضوع رو یاد گرفته باشی!

۲۱. **نادرست** f اکیداً نزولی $\Leftarrow (\forall a,b\in f, a<b \Rightarrow f(a)>f(b))$

۲۲. **نادرست** به نمودار تابع $y=-\frac{1}{x}$ توجه کنید. این تابع در بازه‌های $(-\infty,0)$ و یا $(0,+\infty)$ اکیداً صعودی است، ولی روی $\mathbb{R}-\{0\}$ غیریکنواست.



۲۳. **درست** ابتدا طول زوج مرتب‌ها را به‌ترتیب کم به زیاد مرتب می‌کنیم.

x ها افزایش می‌یابند

$f=\{(-4,0),(-3,1),(0,m),(2,5)\}\Rightarrow 1\le m\le 5$

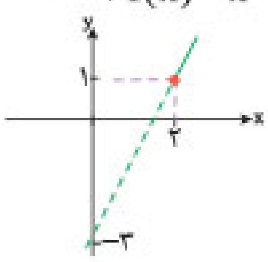
y ها نیز افزایش یابند یا ثابت بمانند

m می‌تواند ۵ مقدار صحیح ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را اختیار کند.

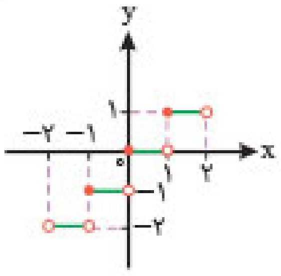
۲۴. **درست** در بازهٔ $(2,+\infty)$ هر دو عبارت $x-1$ و $x-2$ مثبت هستند؛ پس خودشان از داخل قدرمطلق خارج می‌شوند.

$\xrightarrow{x>2} f(x)=x-1+x-2=2x-3$

نمودار $y=2x-3$ به‌صورت مقابل است و تابعی اکیداً صعودی است.



۲۵. **نادرست** تابع $y=[x]$ در بازهٔ $(-2,2)$ یکنوا (صعودی) است، ولی اکیداً یکنوا نیست.
به نمودار آن توجه کنید:



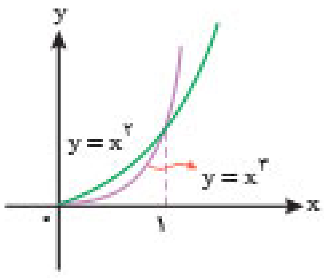
۲۶. **نادرست** در توابع اکیداً نزولی داریم: $a<b \Leftrightarrow f(a)>f(b)$
یعنی اگر f ها از طرفین نامعادله خط بخورند، جهت نامعادله عوض می‌شود؛ پس:

$$f(2x)>f(x-1) \Rightarrow 2x<x-1 \Rightarrow x<-1$$

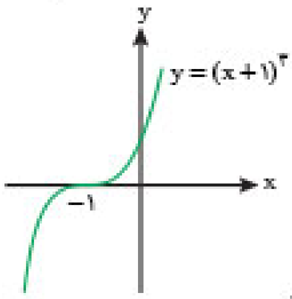
۲۷. ۲؛ عبارت را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x)=2x^2-\cancel{2x^3}+4x+\cancel{2x^3}=2x^2+4x$$

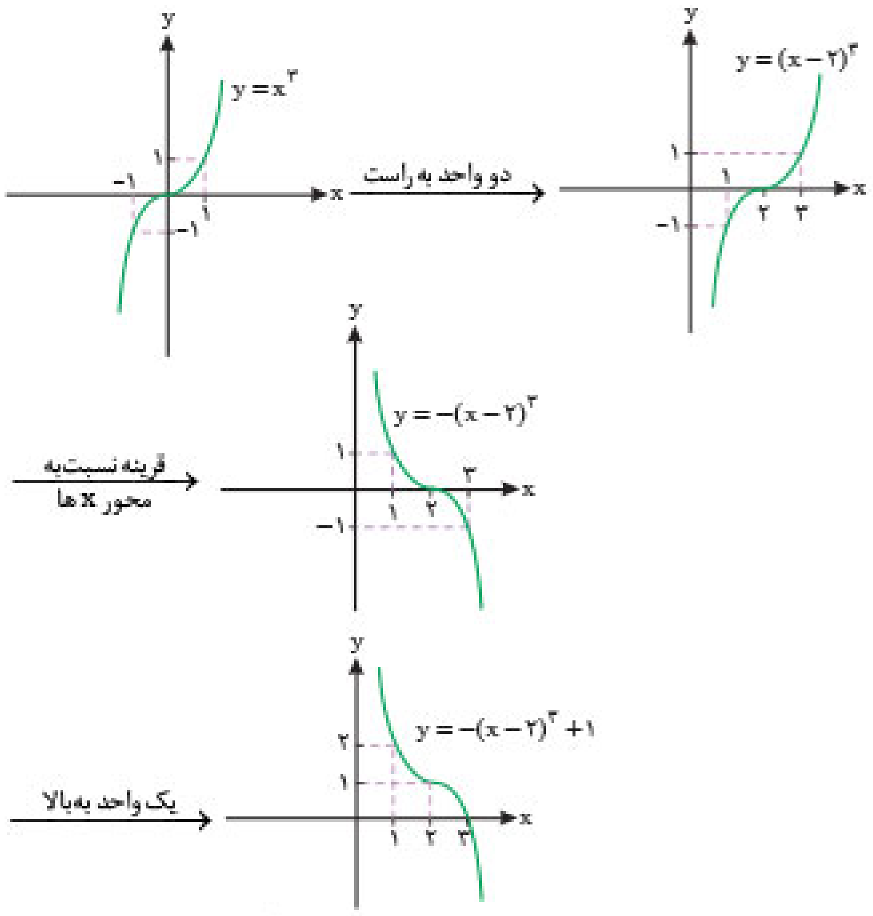
۲۸. پایین‌تر؛ با توجه به نمودار این دو تابع در بازهٔ $(0,1)$، نمودار $y=x^3$ پایین‌تر از نمودار $y=x^2$ قرار می‌گیرد.



۲۹. صعودی؛ نمودار $y=(x+1)^3$ همان نمودار $y=x^3$ است که یک واحد به سمت چپ رفته است.



۳۰. سوم؛ نمودار تابع $y=1-(x-2)^3$ را به کمک $y=x^3$ رسم می‌کنیم:



بنابراین نمودار این تابع از ناحیهٔ سوم نمی‌گذرد. (امتداد آن از ناحیهٔ دوم می‌گذرد.)

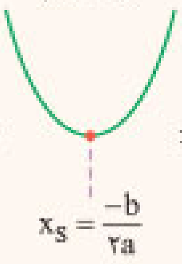
۳۱. ثابت

۳۲. یکنوا؛ یعنی توابع اکیداً صعودی و اکیداً نزولی به‌ترتیب صعودی و نزولی هم محسوب می‌شوند.

۳۳. $(-\infty,2]$

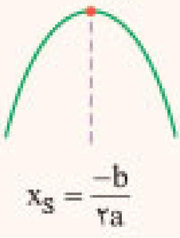
نکته: در تابع درجهٔ دوم $y=ax^2+bx+c$ داریم:

[1] $a>0 \Rightarrow$



$$\Rightarrow \begin{cases} (-\infty,-\frac{b}{2a}] \Rightarrow \text{اکیداً نزولی} \\ [-\frac{b}{2a},+\infty) \Rightarrow \text{اکیداً صعودی} \end{cases}$$

[2] $a<0 \Rightarrow$



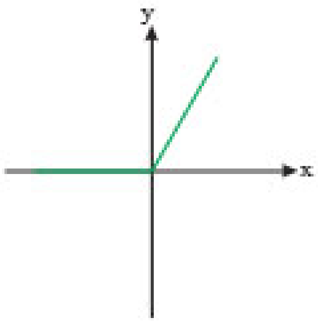
$$\Rightarrow \begin{cases} (-\infty,-\frac{b}{2a}] \Rightarrow \text{اکیداً صعودی} \\ [-\frac{b}{2a},+\infty) \Rightarrow \text{اکیداً نزولی} \end{cases}$$

$$y=x^2-4x+1 \Rightarrow x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-4)}{2(1)}=2$$

با توجه به نکتهٔ بالا، این تابع در بازهٔ $(-\infty,2]$ نزولی (اکیداً نزولی) است.

۳۴. صعودی؛ نمودار تابع $y=x+|x|$ به‌صورت زیر است:

$$y=\begin{cases} x+x & ; x\geq 0 \\ x-x & ; x<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x & ; x\geq 0 \\ 0 & ; x<0 \end{cases} \Rightarrow$$



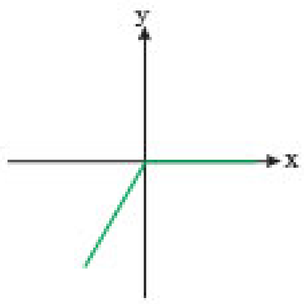
پس این تابع روی $\mathbb{R}$ صعودی است.

۳۵. صفر

دقت کنید: تابعی که هم صعودی و هم نزولی است، تابع ثابت است.

نمودار $y=x-|x|$ را رسم می‌کنیم:

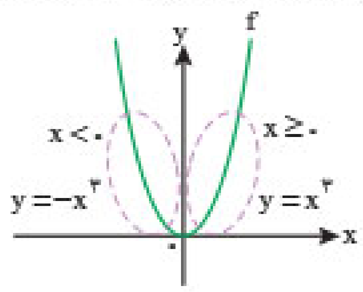
$$y=\begin{cases} x-x & ; x\geq 0 \\ x+x & ; x<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 & ; x\geq 0 \\ 2x & ; x<0 \end{cases} \Rightarrow$$



این تابع در بازهٔ $[0,+\infty)$ تابعِ ثابتِ صفر است؛ پس حداقل مقدار a برابر صفر است.

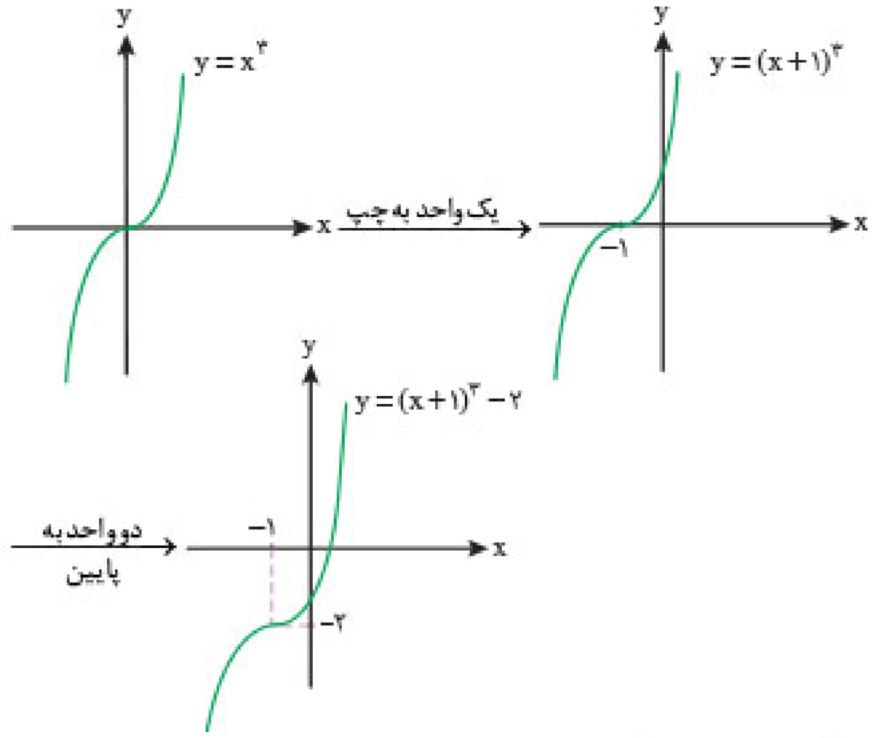
۳۶. صفر؛ تابع $f(x)=x^2|x|$ را به‌صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم و با توجه به نمودار آن، بازهٔ صعودی را مشخص می‌کنیم:

$$f(x)=x^2|x|=\begin{cases} x^3 & ; x\geq 0 \\ -x^3 & ; x<0 \end{cases} \Rightarrow$$



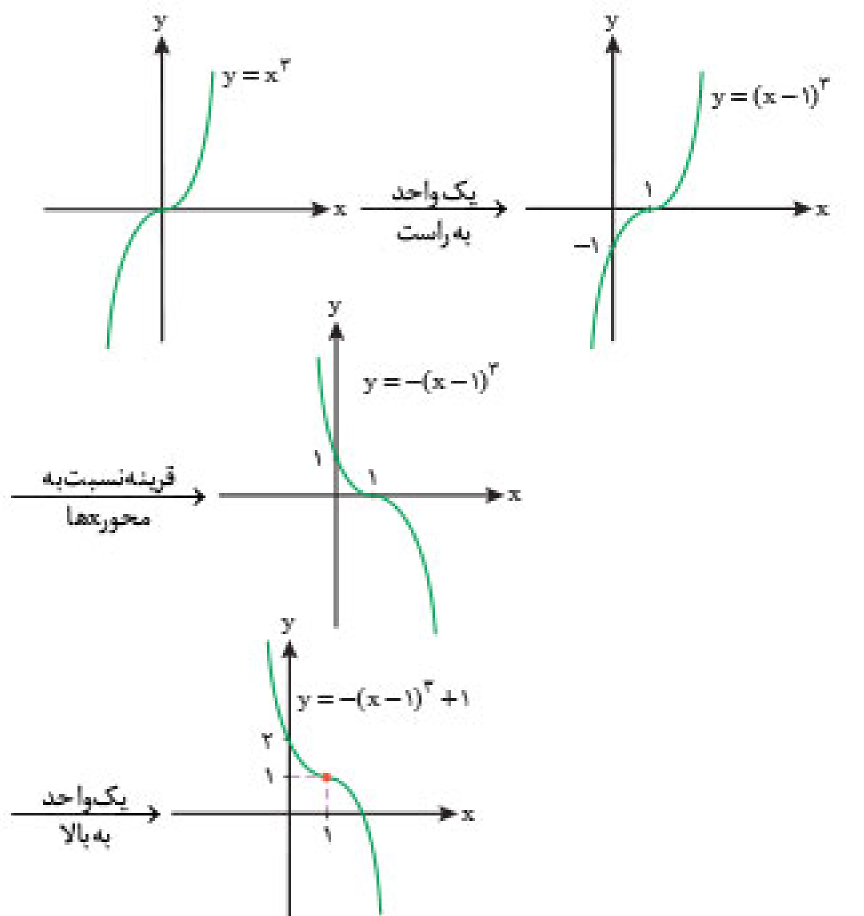
با توجه به نمودار، f در بازهٔ $[0,+\infty)$ صعودی است؛ بنابراین حداقل مقدار a ، صفر است.

۳۷. **الف** ابتدا نمودار تابع $y=x^3$ را رسم کرده و سپس ۱ واحد به سمت چپ روی محور x ها و ۲ واحد به سمت پایین روی محور y ها انتقال می‌دهیم:

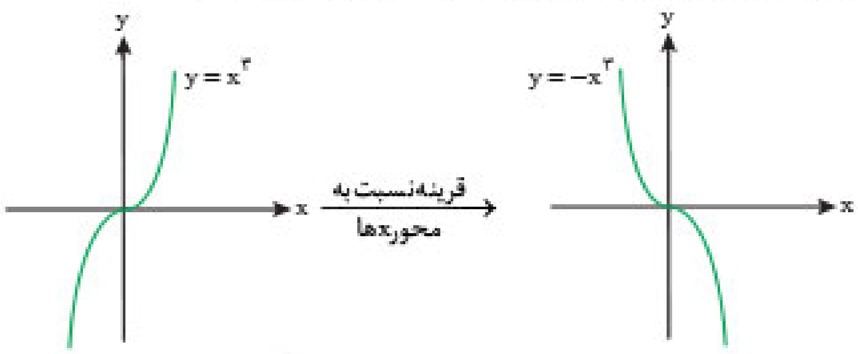


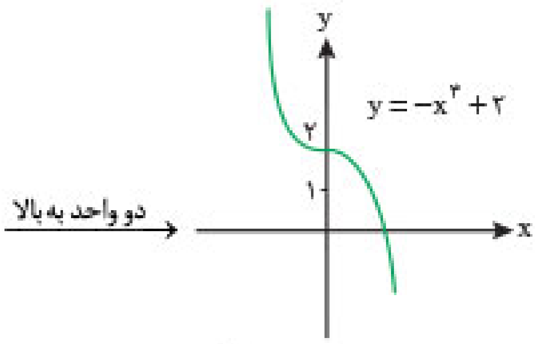
ب ابتدا نمودار $y=x^3$ را رسم کرده و ۱ واحد به سمت راست روی محور x ها انتقال می‌دهیم، سپس آن را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم و در آخر ۱ واحد به سمت بالا، روی محور y ها انتقال می‌دهیم:

ترتیب انتقال‌ها:
$$y=\underset{②}{-}\underset{①}{(x-1)^3}\underset{③}{+1}$$



پ نمودار $y=x^3$ را رسم کرده و نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم؛ سپس ۲ واحد به سمت بالا، روی محور y ها انتقال می‌دهیم:

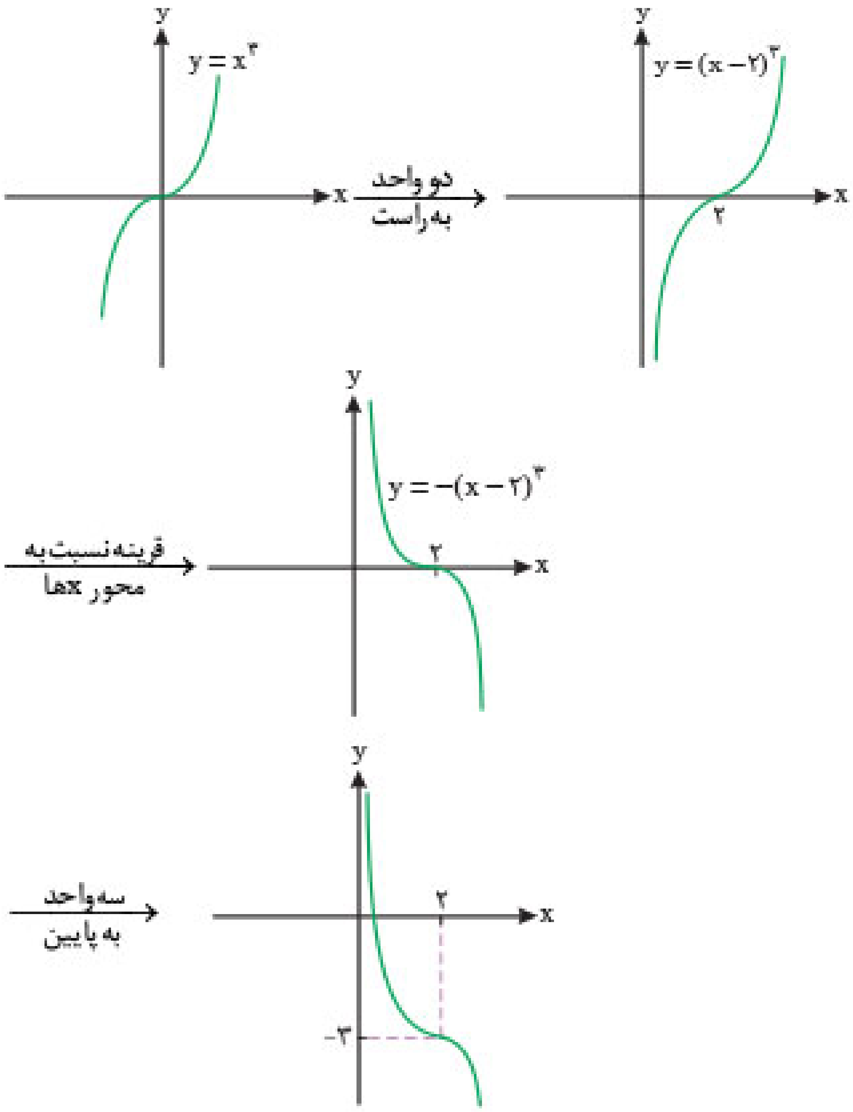




ت ابتدا از منفی داخل پرانتز فاکتور می‌گیریم، ضابطهٔ آن برابر می‌شود با:

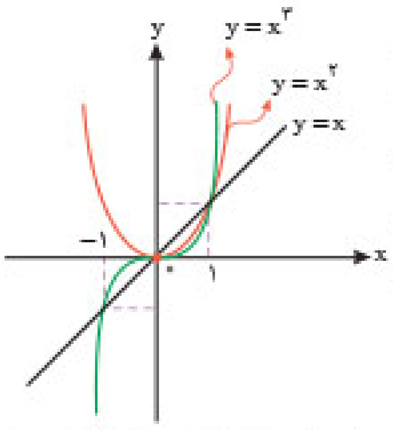
$$y=(-(x-2))^3-3 \Rightarrow y=-(x-2)^3-3$$

حال برای رسم نمودار آن به کمک نمودار $y=x^3$ ، ابتدا آن را ۲ واحد به راست می‌بریم، سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم؛ در انتها نمودار را ۳ واحد به پایین می‌آوریم. نمودار آن به شکل زیر است:



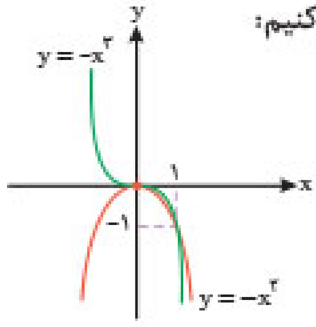
توجه: دامنه و برد همهٔ توابع بالا برابر $\mathbb{R}$ است.

۳۸. **الف** نمودارهای توابع $y=x^2$ ، $y=x^3$ و $y=x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. همان‌طور که مشاهده می‌کنید در بازه‌های $(-\infty,-1)$ و $(0,1)$، نمودار $y=x^3$ پایین‌تر از دو نمودار $y=x^2$ و $y=x$ قرار دارد.



ب با توجه به نمودار رسم‌شده در بازه‌های $(-1,0)$ و $(1,+\infty)$، نمودار تابع $y=x$ پایین‌تر از دو نمودار $y=x^2$ و $y=x^3$ قرار دارد.

۳۹. نمودارهای $y=-x^۲$ و $y=-x^۳$ را رسم می‌کنیم:
با توجه به نمودارها، نمودار تابع $y=-x^۳$ در بازهٔ $(۱,+\infty)$ پایین‌تر از نمودار تابع $y=-x^۲$ قرار می‌گیرد.

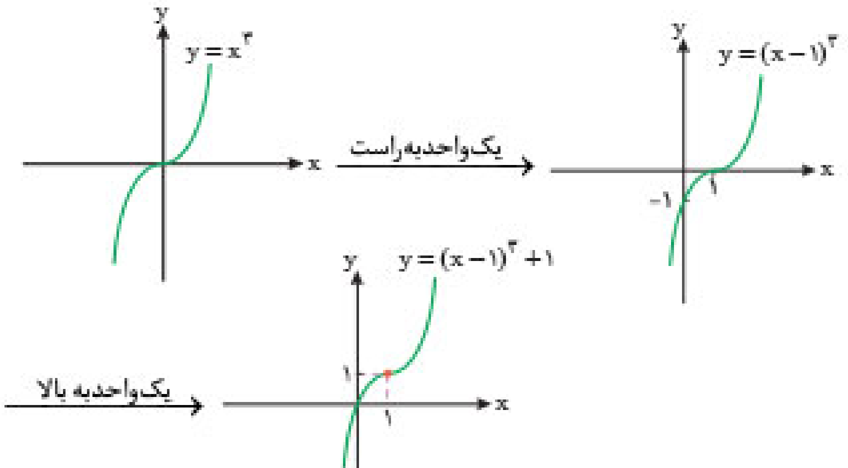


توجه: دو نمودار در نقاط $(۰,۰)$ و $(۱,-۱)$ با هم متقاطع هستند.

۴۰. به کمک اتحاد مکعب دوجمله‌ای سعی می‌کنیم آن را به فرم $y=a(x+b)^۳+c$ تبدیل کنیم؛ پس به آن ۱ واحد اضافه و کم می‌کنیم:

$$y=\underbrace{x^۳-۳x^۲+۳x-۱}_{(x-۱)^۳}+۱=(x-۱)^۳+۱$$

حال به کمک انتقال، نمودار آن را از روی نمودار تابع $y=x^۳$ رسم می‌کنیم:



۴۱. اگر فرم انتقالی تابع درجهٔ سوم را به صورت $y=a(x+b)^۳+c$ در نظر بگیریم، مشاهده می‌کنیم:

۱ نمودار تابع درجهٔ سوم، یک واحد به چپ و یک واحد به بالا رفته است؛ یعنی:

$$y=a(x+۱)^۳+۱$$

۲ این نمودار از مبدأ مختصات می‌گذرد؛ یعنی $(۰,۰)$ در ضابطهٔ آن صدق می‌کند:

$$\xrightarrow{(۰,۰)} ۰=a(۰+۱)^۳+۱\Rightarrow a+۱=۰\Rightarrow a=-۱$$

در نتیجه داریم:

$$y=-(x+۱)^۳+۱$$
$$=-(x^۳+۳x^۲+۳x+۱)+۱=\underset{a=-۱}{-x^۳}\ \underset{b=-۳}{-۳x^۲}\ \underset{c=-۳}{-۳x}+\underset{d=۰}{۰}$$

۴۲. ابتدا اعداد موجود در دامنهٔ تابع f را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$f=\{(-۲,۵),(-۱,k),(۰,۴),(۱,۲)\}$$

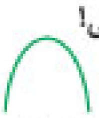
چون تابع اکیداً نزولی است، باید با افزایش x ها، y ها کاهش پیدا کنند؛ پس k باید از ۵ کمتر و از ۴ بیشتر باشد، در نتیجه $۴<k<۵$.

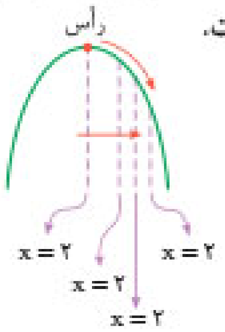
۴۳. الف نمودار تابع در بازهٔ $(-\infty,-۳]$ اکیداً نزولی و در بازه‌های $(-\infty,-۲]$، $[-۳,۰]$ و $[۲,۳]$ نزولی است. این تابع در بازه‌های $[۰,۲]$ و $[۳,+\infty)$ اکیداً صعودی و در بازه‌های $[-۳,۰]$ و $[۰,+\infty)$ صعودی است.

توجه: در بازه‌های $[-۳,۰]$ و $[۲,۳]$، تابع ثابت است که هم صعودی محسوب می‌شود و هم نزولی!

ب نمودار تابع در بازهٔ $(-\infty,-۲]$ اکیداً صعودی و صعودی است. در بازهٔ $(-۲,۱)$ تابع ثابت، یعنی هم صعودی و هم نزولی است. در بازهٔ $[۱,+\infty)$ اکیداً نزولی و نزولی است.

۴۴. الف تابعی که هم صعودی و هم نزولی باشد، تابعی ثابت است؛ پس اگر $m=۰$ باشد، تابع $y=۲$ خواهد شد که هم صعودی است و هم نزولی!

ب تابع $y=-x^۲+mx+۱$ یک سهمی ماکزیمم‌دار به صورت  است؛ چون این تابع در بازهٔ $[۲,+\infty)$ اکیداً نزولی شده است، می‌توان در نظر گرفت که طول رأس سهمی برابر با ۲ و یا کمتر از ۲ بوده است.

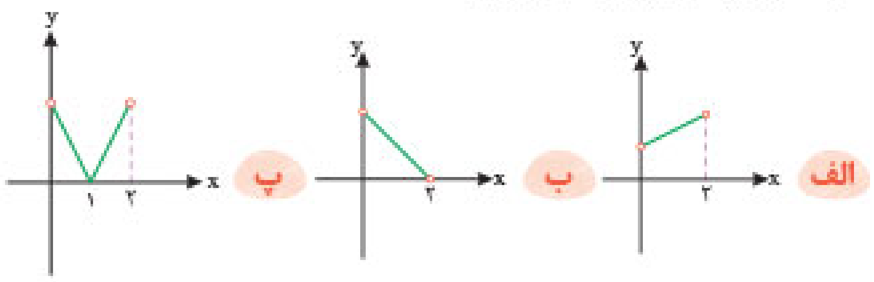


$$x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{-m}{۲(-۱)}=\frac{m}{۲}\le ۲\Rightarrow m\le ۴$$

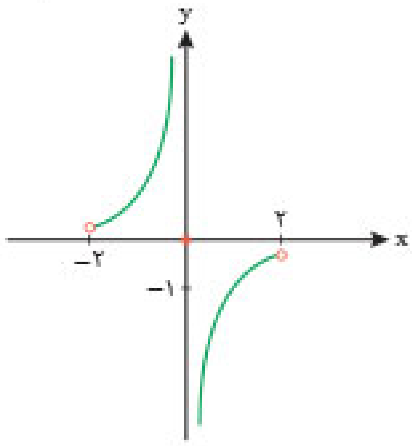
پ اگر ضریب $x^۳$ منفی شود، تابع درجهٔ سوم $y=(-۹+m^۲)x^۳+۵$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی خواهد بود؛ پس:

$$-۹+m^۲<۰\Rightarrow m^۲<۹\Rightarrow -۳<m<۳$$

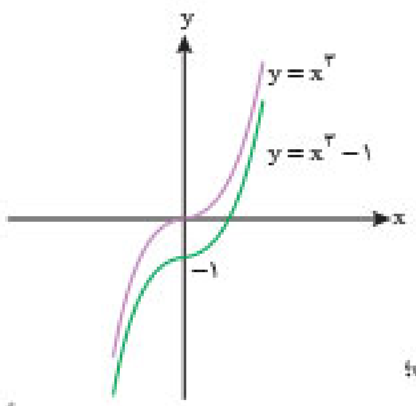
۴۵. نمودارهایی که رسم می‌کنیم، در این مسئله می‌تواند متفاوت باشد؛ برای نمونه نمودارهای زیر را رسم می‌کنیم:



۴۶. نمودار تابع $y=f(x)$ در بازهٔ $(-۲,۲)$ به شکل مقابل است. این تابع در بازهٔ $(-۲,۰)$ و $(۰,۲)$ اکیداً صعودی است؛ ولی روی $(-۲,۲)$ اکیداً صعودی نیست و غیریکنواست.
این مسئله هم می‌تواند جواب‌های مختلفی داشته باشد.



۴۷. الف تابع $y=x^۳-۱$ یک تابع درجهٔ سوم است. ابتدا نمودار $y=x^۳$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را ۱ واحد به سمت پایین روی محور y ها انتقال می‌دهیم:
این تابع، روی $\mathbb{R}$ صعودی است.

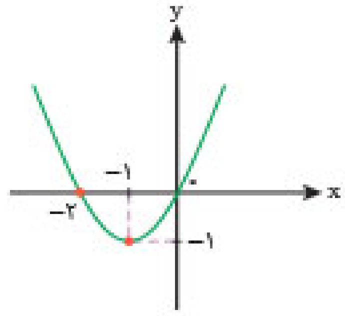


(البته این تابع روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است؛ ولی چون توی صورت سؤال صعودی یا نزولی‌بودن خواسته شده بود و توابع اکیداً صعودی، صعودی هم هستند؛ پس صرفاً می‌گوییم صعودی.)

ب نمودار تابع $y=x^۲+۲x$، نمودار یک سهمی است. به ضابطهٔ تابع، ۱ واحد اضافه و کم می‌کنیم تا آن را به صورت مربع کامل دربیاوریم:

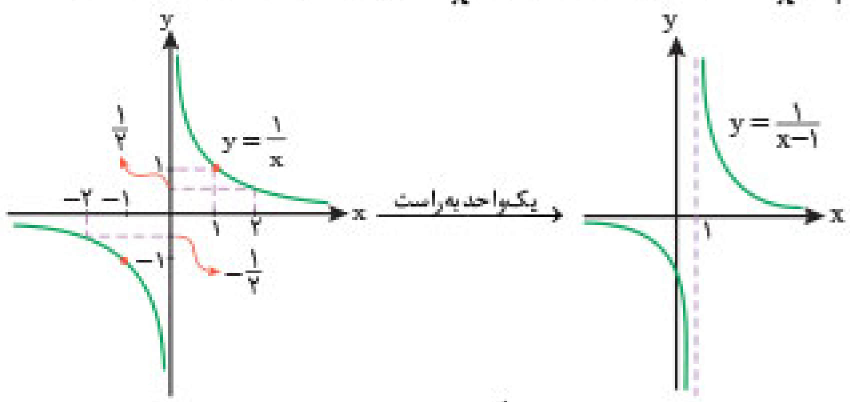
$$y=x^۲+۲x+۱-۱\Rightarrow y=(x+۱)^۲-۱$$

نمودار $y=(x+1)^2-1$ همان $y=x^2$ است که یک واحد به سمت چپ و یک واحد به پایین رفته است.



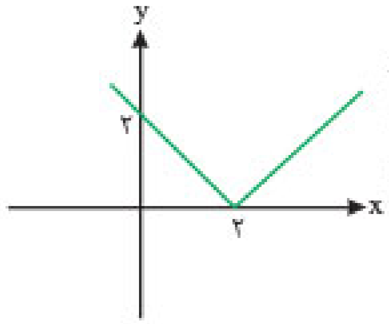
با توجه به نمودار، این تابع در بازهٔ $(-\infty,-1]$ نزولی و در بازهٔ $[-1,+\infty)$ صعودی است.

پ تابع $y=\frac{1}{x}$ یک تابع گویا (هموگرافیک) است که در $x=0$ (ریشهٔ مخرج) تعریف‌نشده است. نمودار آن به شکل زیر است. برای رسم نمودار $y=\frac{1}{x-1}$، کافی است نمودار $y=\frac{1}{x}$ را یک واحد به راست ببریم.



با توجه به نمودار، تابع $y=\frac{1}{x-1}$ در هر کدام از بازه‌های $(-\infty,1)$ و $(1,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

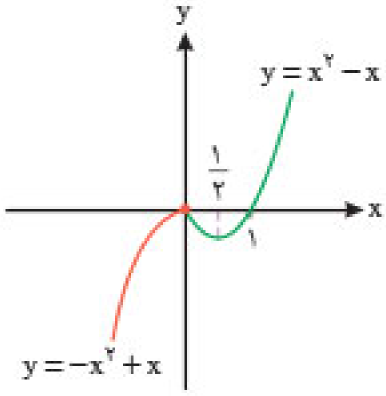
ت نمودار $y=|x-2|$ همان نمودار $y=|x|$ است که ۲ واحد به راست رفته است. این تابع در بازهٔ $(-\infty,2]$ نزولی و در بازهٔ $[2,+\infty)$ صعودی است.



ث تابع $y=(x-1)|x|$ را به‌صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y=\begin{cases}(x-1)(x) & ; \ x\ge 0\\ (x-1)(-x) & ; \ x<0\end{cases}\Rightarrow y=\begin{cases}x^2-x & ; \ x\ge 0\\ -x^2+x & ; \ x<0\end{cases}$$

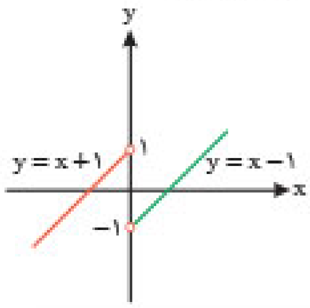
نمودار آن به‌صورت مقابل است:



این تابع در بازه‌های $(-\infty,0]$ و $[\frac{1}{2},+\infty)$ صعودی و در بازهٔ $[0,\frac{1}{2}]$ نزولی است.

ج تابع $y=x-\frac{x}{|x|}$ را به‌صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y=\begin{cases}x-\frac{x}{x} & ; \ x>0\\ x-\frac{x}{(-x)} & ; \ x<0\end{cases}\Rightarrow y=\begin{cases}x-1 & ; \ x>0\\ x+1 & ; \ x<0\end{cases}$$

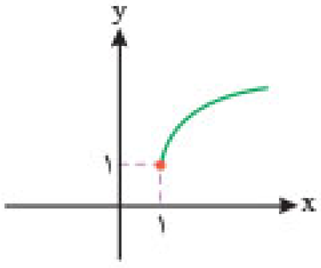


نمودار آن به‌صورت مقابل است:

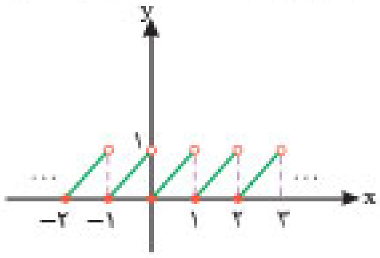
تذکر: همیشه قدرمطلق‌ها را به صورت تابع چندضابطه‌ای بنویسید.

با توجه به نمودار، این تابع در بازهٔ $(-\infty,0)$ صعودی و در بازهٔ $(0,+\infty)$ هم صعودی است، ولی در کل غیریکنوا است.

چ برای رسم نمودار $y=\sqrt{x-1}+1$ از روی نمودار $y=\sqrt{x}$، ابتدا نمودار آن را یک واحد به راست و سپس یک واحد بالا می‌بریم. با توجه به نمودار، این تابع روی دامنه‌اش، یعنی $[1,+\infty)$ صعودی است.



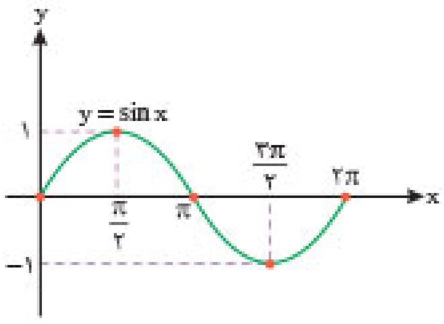
ح با عددگذاری نمودار تابع $y=x-[x]$ را به‌صورت زیر رسم می‌کنیم:



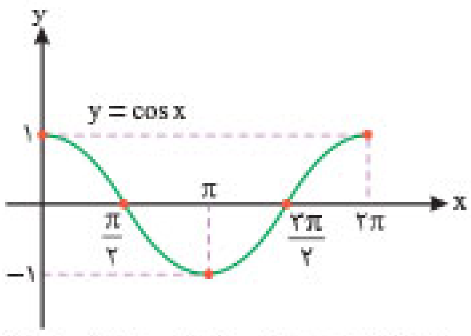
تذکر: تابع $x-[x]$ همیشه بین صفر و یک است.

این تابع در بازه‌های ... و $[-2,-1)$، $[-1,0)$ و $[0,1)$ و $[1,2)$ و ... صعودی است، ولی در کل غیریکنوا است.

۴۸. نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ به‌صورت زیر است:

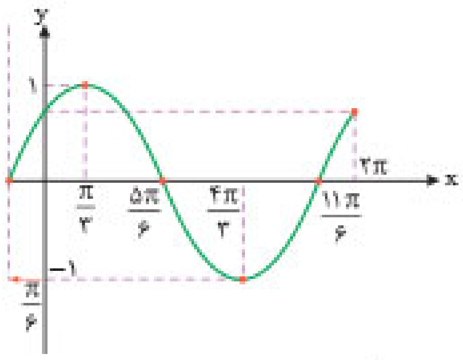


$$\begin{cases}\text{اکیداً صعودی}\Rightarrow 0\le x\le \frac{\pi}{2}\\ \text{اکیداً نزولی}\Rightarrow \frac{\pi}{2}\le x\le \frac{3\pi}{2}\\ \text{اکیداً صعودی}\Rightarrow \frac{3\pi}{2}\le x\le 2\pi\end{cases}$$



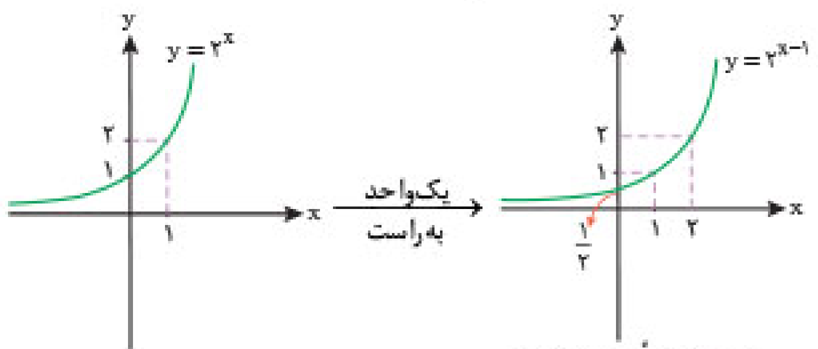
$$\begin{cases}\text{اکیداً نزولی}\Rightarrow 0\le x\le \pi\\ \text{اکیداً صعودی}\Rightarrow \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$$

برای رسم نمودار تابع $y=\sin(x+\frac{\pi}{6})$، کافی است نمودار تابع $y=\sin x$ را به اندازهٔ $\frac{\pi}{6}$ به سمت چپ ببریم.

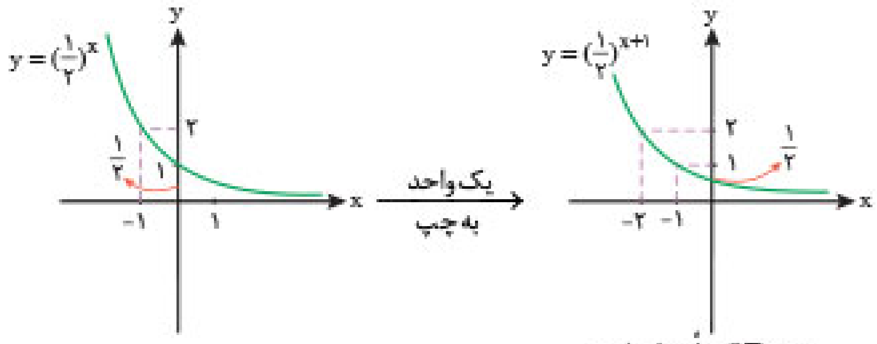


$$\begin{cases}\text{اکیداً صعودی}\Rightarrow 0\le x\le \frac{\pi}{3}\\ \text{اکیداً نزولی}\Rightarrow \frac{\pi}{3}\le x\le \frac{4\pi}{3}\\ \text{اکیداً صعودی}\Rightarrow \frac{4\pi}{3}\le x\le 2\pi\end{cases}$$

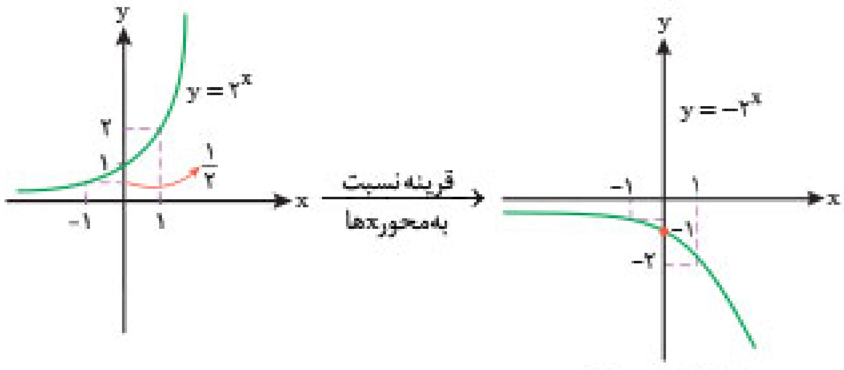
۴۹. نمودارهای $y=2^{x-1}$، $y=(\frac{1}{2})^{x+1}$ و $y=-2^x$ به‌صورت زیر هستند:



روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.



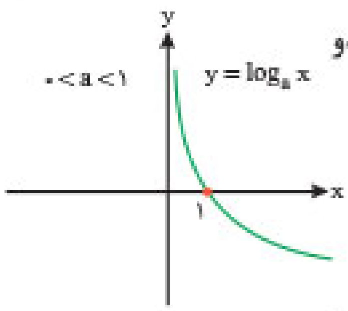
روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است.



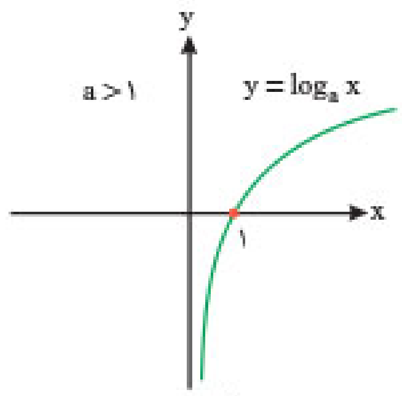
روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است.

نتیجه: توابع به فرم $y=a^{x}$ که در آن‌ها $a>۱$ است، توابع اکیداً صعودی هستند. اگر ضابطه آن‌ها در یک منفی ضرب شود، اکیداً نزولی می‌شوند. (همین نکته در رابطه با توابع به فرم $y=a^{x}$ با شرط $۰<a<۱$ نیز صدق می‌کند؛ یعنی این توابع اکیداً نزولی هستند و اگر در یک منفی ضرب شوند، اکیداً صعودی خواهند شد.)

۵۰. **الف** نمودار تابع $y=\log_a x$ را در دو حالت $a>۱$ و $۰<a<۱$، رسم می‌کنیم:

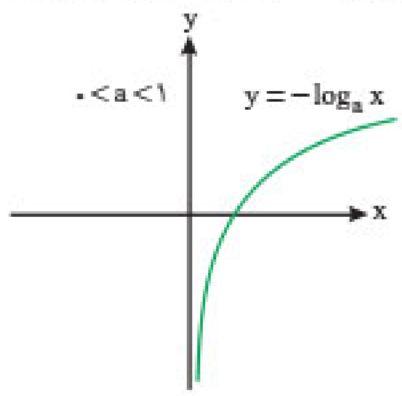


روی دامنه‌اش، یعنی بازهٔ $(۰,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

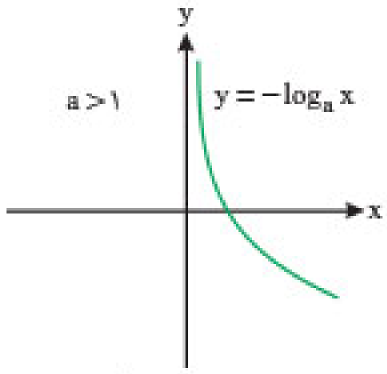


روی دامنه‌اش، یعنی $(۰,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

ب نمودار تابع $y=-\log_a x$ قرینهٔ نمودار $y=\log_a x$ نسبت به محور x هاست.



این تابع روی دامنه‌اش، یعنی $(۰,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

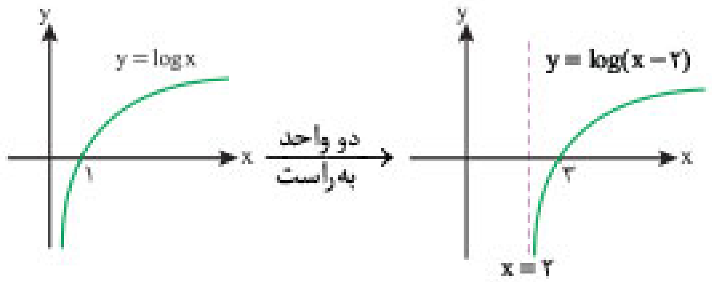


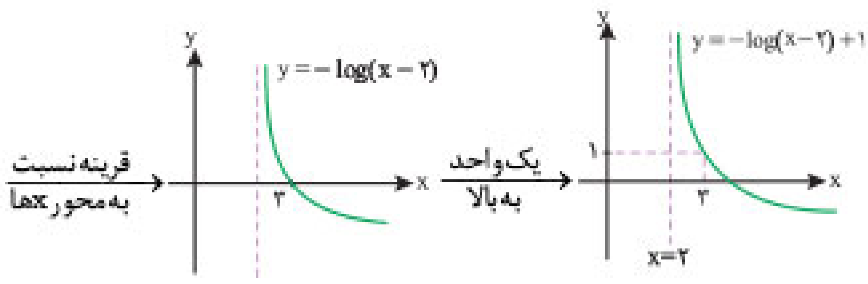
این تابع روی دامنه‌اش، یعنی $(۰,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

پ ۱) اگر $f(x)=\log_a x$ اکیداً صعودی باشد، $g(x)=-\log_a x$ اکیداً نزولی خواهد بود.

۲) اگر $f(x)=\log_a x$ اکیداً نزولی باشد، $g(x)=-\log_a x$ اکیداً صعودی خواهد بود. (علامت منفی جهت یکنوایی رو عوض می‌کنه)

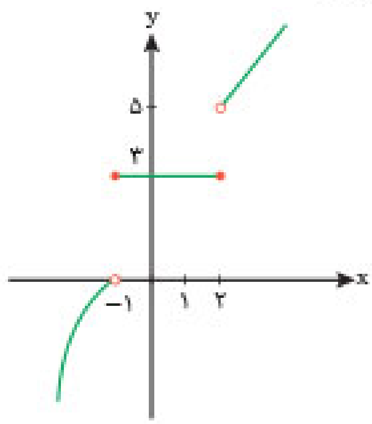
۵۱. نمودار تابع $y=-\log(x-۲)+۱$ را به کمک انتقال از روی نمودار تابع $y=\log x$ رسم می‌کنیم:





این تابع روی دامنه‌اش، یعنی $x>۲$ اکیداً نزولی است.

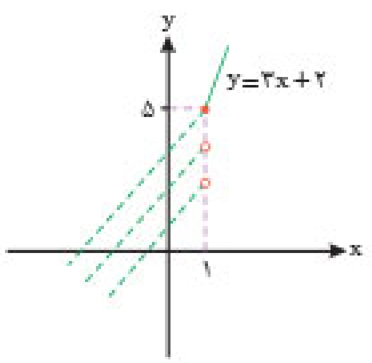
۵۲. برای رسم نمودار تابع چندضابطه‌ای f، نمودار خط $y=۲x+۱$ را در بازهٔ $x>۲$، نمودار $y=۳$ را در بازهٔ $-۱\le x\le ۲$ و نمودار سهمی $y=-x^{۲}+۱$ را در بازهٔ $x<-۱$ رسم می‌کنیم:



این تابع روی $\mathbb{R}$ صعودی است و در بازهٔ $[-۱,۲]$ نزولی است.

این تابع در بازهٔ $[-۱,۲]$ تابع ثابت است که هم صعودی و هم نزولی است.

۵۳. نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}۳x+۲ & ; x\ge ۱\\ x+m & ; x<۱\end{cases}$ به‌صورت مقابل است:



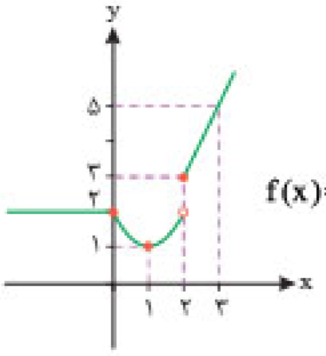
مقدار $f(x)=x+m$ در $x=۱$ برابر $۱+m$ است.

با توجه به نمودار، برای این‌که f همواره اکیداً صعودی باشد، باید:

$۱+m\le ۵ \Rightarrow m\le ۴$

توجه: یعنی عرض ضابطهٔ پایینی در $x=۱$ باید پایین‌تر از عرض ضابطهٔ بالایی در $x=۱$ باشد.

۵۴. نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & ; \quad x\ge 2 \\ x^2-2x+2 & ; \quad 0<x<2 \\ 2 & ; \quad x\le 0 \end{cases}$ به‌صورت زیر است:



$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & ; \quad x\ge 2 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 2 & 3 \\ \hline y & 3 & 5 \end{array} \\ x^2-2x+2 & ; \quad 0<x<2 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 2 & 1 & 2 \end{array} \\ 2 & ; \quad x\le 0 \end{cases}$$

رأس سهمی

این تابع در بازهٔ $(-\infty, 1]$ نزولی است؛ پس حداکثر مقدار a برابر ۱ است.

۵۵. طبق تعریف تابع اکیداً صعودی، داریم:

$f(\square)<f(\triangle)\Leftrightarrow \square<\triangle$

بنابراین:

$$f(a^2+1)<f(3a-1)\Rightarrow a^2+1<3a-1$$

$$\Rightarrow a^2-3a+2<0\Rightarrow (a-2)(a-1)<0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} a & & 1 & & 2 & \\ \hline (a-2)(a-1) & + & 0 & - & 0 & + \end{array} \Rightarrow 1<a<2$$

۵۶. با فرض $f(x)=3^x$، داریم:

$$f(3x+1)=3^{3x+1}$$

$$f(-3)=3^{-3}=\frac{1}{27}$$

پس با توجه به فرض سؤال می‌توانیم بنویسیم:

$$f(3x+1)\le f(-3)$$

از طرفی می‌دانیم f تابعی اکیداً صعودی است؛ پس:

$$3x+1\le -3\Rightarrow 3x\le -4\Rightarrow x\le -\frac{4}{3}$$

۵۷. **نادرست** $(fog)(x)=f(g(x))$؛ بنابراین:

$$(fog)(1)=f(g(1))=f(2)=6$$

۵۸. **نادرست**

$$\left.\begin{array}{l} g(1)=\sqrt{1^2+3}=\sqrt{4}=2 \\ (fog)(1)=f(g(1))=f(2)=2(2)+3=7 \\ f(1)=2(1)+3=5 \end{array}\right\}\Rightarrow (fog)(1)\ne f(1)$$

۵۹. **نادرست**

$$(fog)(5)=f(g(5))=f(\sqrt{(5)^2-4})=f(\sqrt{21})=(\sqrt{21})^2-4=21-4=17$$

۶۰. **نادرست** $(gof)(x)=g(f(x))$؛ پس:

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x})=\sin(\sqrt{x})$$

۶۱. **نادرست** طبق تعریف دامنهٔ تابع gof داریم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

چون هر دو تابع f و g چندجمله‌ای هستند، پس دامنهٔ آن‌ها برابر $\mathbb{R}$ است.

$$D_{gof}=\{x\in\mathbb{R} \mid x-2\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$$

۶۲. **نادرست** این تساوی گاهی برقرار نیست و گاهی ممکن است برقرار باشد؛ برای مثال اگر $f(x)=x$ و $g(x)=x^2$ باشد، داریم:

$$D_{fog}=D_{gof}=\mathbb{R}, \begin{cases} (fog)(x)=f(g(x))=f(x^2)=x^2 \\ (gof)(x)=g(f(x))=g(x)=x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (fog)(x)=(gof)(x)$$

۶۳. **درست**

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(4x-1)=2(4x-1)+k=8x+k-2$$

با مقایسهٔ دو عبارت $8x+k-2$ و $8x+10$ داریم: $k-2=10\Rightarrow k=12$

۶۴. **درست** $f(f(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(f(x))=f(2-|x-2|)=2-|2-|x-2|-2|=2-|-|x-2||$$

$$\xrightarrow{|-|A||=|A|} 2-|x-2|=f(x)$$

۶۵. **درست** با توجه به تعریف دامنهٔ fog داریم:

$$D_{fog}=\{\overbrace{x\in D_g}^{1} \mid \overbrace{g(x)\in D_f}^{2}\}$$

مجموعه جواب به دست آمده از قسمت ۲ را با قسمت ۱ اشتراک می‌گیریم.

۶۶. **درست** به درسنامه مراجعه کنید.

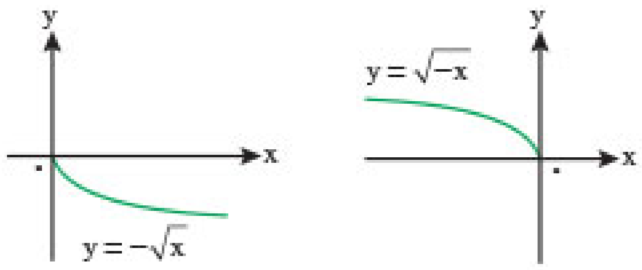
۶۷. **نادرست** دامنهٔ تابع $y=f(\frac{x}{2})$، با دو برابر کردن طول نقاط دامنهٔ تابع f به دست می‌آید.

۶۸. **نادرست** برد تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$، k برابر برد تابع $y=f(x)$ است.

(البته اگر $k=1$ باشه، می‌تونه بردهاشون یکی باشه!)

۶۹. **درست** به درسنامه مراجعه کنید.

۷۰. **نادرست** با رسم نمودار دو تابع می‌توانیم نادرستی عبارت را به وضوح نتیجه بگیریم.



۷۱. **نادرست** اگر $k>1$، آن‌گاه نمودار $y=kf(x)$ از انبساط عمودی نمودار $y=f(x)$ به دست می‌آید.

۷۲. **درست** به درسنامه مراجعه کنید.

۷۳. **نادرست** ضریب x، $\frac{1}{3}$ است و انبساط افقی داریم.

۷۴. **نادرست** ضریب ۲ در پشت x، باعث انقباض افقی در راستای محور x ها می‌شود.

۷۵. **نادرست** اگر $y=-x^3$ را دو واحد به چپ منتقل کنیم، به تابع $y=-(x+2)^3$ تبدیل می‌شود نه $(-x+2)^3$! دقت کنید فقط x به $x+2$ تبدیل می‌شود. $(x\rightarrow x+2)$

۷۶. **درست** باید طول نقطهٔ $A(3,-2)$ را ۳ برابر کنیم؛ پس $A'(9,-2)$.

۷۷. **نادرست** باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم.

$$-1\le 2x+1\le 2\xrightarrow{-1} -2\le 2x\le 1\Rightarrow -1\le x\le \frac{1}{2}$$

بنابراین دامنهٔ تابع $y=-f(2x+1)-1$ برابر $[-1, \frac{1}{2}]$ است.

۷۸. **درست**

$$-2\le x\le 3\xrightarrow{\times 2} -4\le 2x\le 6\xrightarrow{+1} -3\le 2x+1\le 7$$

$$\Rightarrow D_f=[-3, 7]$$

۷۹. $\frac{1}{3}$؛ زیرا: $(fof)(1)=f(f(1))=f(\frac{1}{1+1})=f(\frac{1}{2})=\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}$

۸۰. ۳؛ می‌دانیم $(fog)(x)=f(g(x))$؛ بنابراین داریم:

$$(fog)(5)=f(g(5))$$

چون $g(x)=2x-1$، پس $g(5)=2\times 5-1=9$ و همچنین $f(x)=\sqrt{x}$؛ پس $f(9)=\sqrt{9}=3$ است. $f(g(5))=f(9)=3$

۸۱. ۵؛ $(fog)(x)=f(g(x))$؛ بنابراین داریم:

$$(fog)(4)=f(g(4))=f(7)=5$$